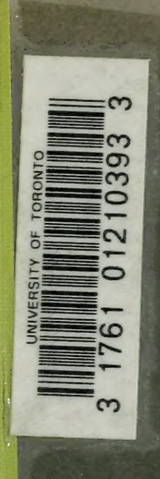


Issaly, Pierre Adolphe
Principes fondamentaux
de la théorie des pseudo-
surfaces

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

THÉORIE DES PSEUDO-SURFACES

PAR

M. l'Abbé ISSALY.

PARIS,
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
6 et 12, rue de la Sorbonne.

1902

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

THÉORIE DES PSEUDO-SURFACES

TIPOGRAFIA MATEMATICA DI PALERMO, via Villareale, 11.
(262.1500.14 1/2) 8-4-1902.

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

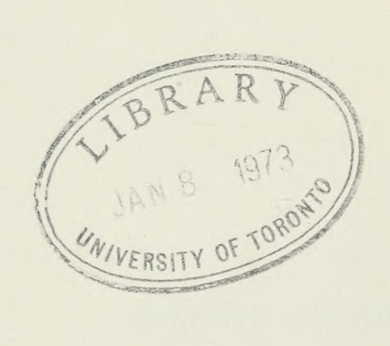
THÉORIE DES PSEUDO-SURFACES

PAR

M. l'Abbé ISSALY.

PARIS,
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
6 et 12, rue de la Sorbonne.

1902


LIBRARY
JAN 8 1973
UNIVERSITY OF TORONTO

AVERTISSEMENT.

Cet opuscule est une seconde édition, ou mieux, une complète refonte des deux mémoires que nous avons publiés (à la Note finale près), en 1888 et 1889, dans le Bulletin de la Société Mathématique de France, sous ces titres : 1° *Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites* ; 2° *Étude géométrique de la courbure des pseudo-surfaces.*

D'après ces écrits « une pseudo-surface est un lieu géo-« métrique d'un nouveau genre, produit par deux systèmes de « courbes variables, ne s'entrecoupant qu'aux infiniment petits « du second ordre près. Un tel lieu ne peut, au minimum, « être représenté que par une équation différentielle totale à « trois variables x, y, z, *non intégrable ;* ce qui assigne mani-« festement à la surface (classique) le rang de simple cas par-« ticulier, voire encore celui de cas-limite, vis-à-vis de la pseudo-« surface », etc.

Pour se faire une juste idée des avantages théoriques et pratiques que peut présenter un pareil concept, le lecteur consultera utilement, au n° 477 du *Cosmos,* notre Dissertation sur : *La méthode expérimentale opposée à un nouvel élément (géométrique) d'investigation.*

Que si la question excite son intérêt, il lui sera loisible

de prendre ensuite connaissance de nos autres Mémoires d'application des pseudo-surfaces, à l'Optique géométrique principalement, mémoires insérés (à partir du t. V, 3e série) dans le recueil de ceux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

THÉORIE DES PSEUDO-SURFACES.

LIVRE I.

ÉTUDE DES DIVERSES LIGNES QU'ON PEUT TRACER SUR UNE PSEUDO-SURFACE.

Chapitre I.

RELATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I.

Formules préliminaires.

1. Prenons un système d'axes obliques OX, OY, d'angle Φ aigu et, tout d'abord, constant. Élevons au point O, sur le plan de cet angle, la perpendiculaire OZ; nous formerons ainsi un trièdre que nous qualifierons de *bi-rectangle* (Fig. 1). Son supplémentaire OX_1Y_1Z, d'angle $\pi - \Phi$, sera, lui aussi, birectangle.

Soit maintenant OA une semi-droite quelconque située dans le plan de l'angle Φ et faisant avec OX et OY des angles respectivement égaux à φ et à φ'. Si l'on prend sur elle un point I à la distance ρ de l'origine, on aura, pour exprimer les coordonnées obliques de ce point:

$$(i)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{X}{\sin\varphi'} &= \frac{Y}{\sin\varphi} = \frac{\rho}{\sin\Phi}, \\ \frac{X_1}{\cos\varphi} &= \frac{Y_1}{\cos\varphi'} = \frac{\rho}{\sin\Phi}. \end{aligned}\right.$$

Désignant par (x, y) et (x_1, y_1) les projections *orthogonales* de ρ sur ces mêmes axes, on déduit des rapports qui précèdent

$$(1)\quad \begin{cases} X + Y\cos\Phi = x = X_1 \sin\Phi, \\ Y + X\cos\Phi = y = Y_1 \sin\Phi; \end{cases}$$

ou, équivalemment,

$$(1')\quad \begin{cases} X_1 - Y_1\cos\Phi = x_1 = X \sin\Phi, \\ Y_1 - X_1\cos\Phi = y_1 = Y \sin\Phi. \end{cases}$$

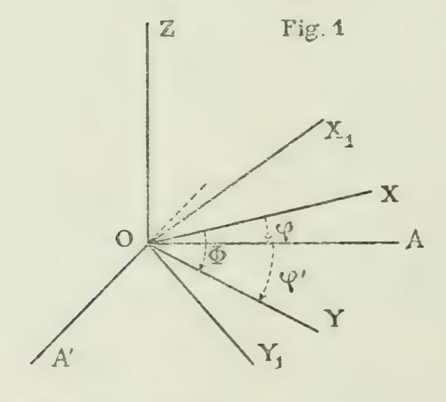
Entre les projections orthogonales introduites, on a, en conséquence, les deux systèmes auxiliaires

$$(2)\quad \begin{cases} x - y\cos\Phi = x_1 \sin\Phi, \\ y - x\cos\Phi = y_1 \sin\Phi; \end{cases}$$

$$(2')\quad \begin{cases} x_1 + y_1\cos\Phi = x \sin\Phi, \\ y_1 + x_1\cos\Phi = y \sin\Phi, \end{cases}$$

2. Sur la direction choisie OA, élevons, en second lieu, dans le sens direct, la perpendiculaire OA' et prenons sur elle un point I' à la distance ρ' de l'origine; nous aurons, pour la détermination de ce point, dans les deux systèmes d'axes coordonnés :

$$(i')\quad \begin{cases} \dfrac{X'}{-\cos\varphi'} = \dfrac{Y'}{\cos\varphi} = \dfrac{\rho'}{\sin\Phi}, \\ \dfrac{X'_1}{-\sin\varphi} = \dfrac{Y'_1}{\sin\varphi'} = \dfrac{\rho'}{\sin\Phi}. \end{cases}$$



De cette double série de rapports égaux, il serait aisé de tirer, comme vérification, tous les résultats que les suites (i) nous ont déjà fournis.

3. Plus généralement, désignons par (x, y, z) les coordonnées d'un point quelconque du plan des XY, par rapport à un trièdre trirectangle donné $Oxyz$ ou T_0, supposé *fixe;* par (a, b, c), (a', b', c') les cosinus directeurs de OX, OY, par rapport à ce même trièdre, et par (a_1, b_1, c_1), (a'_1, b'_1, c'_1), ceux de OX_1, OY_1; nous aurons les formules de transformation

$$(3)\qquad \begin{cases} x = aX + a'Y + a''Z = a_1X_1 + a'_1Y_1 + a''_1Z_1, \\ y = bX + b'Y + b''Z = b_1X_1 + b'_1Y_1 + b''_1Z_1, \\ z = cX + c'Y + c''Z = c_1X_1 + c'_1Y_1 + c''_1Z_1. \end{cases}$$

De ces formules, on tire d'abord les relations qui lient entr'eux les cosinus directeurs des arêtes des deux trièdres supplémentaires. Il suffit pour cela d'y apporter les valeurs (1) et (1'), successivement, puis, d'égaler deux-à-deux les coefficients des mêmes variables. On trouve ainsi, à l'instar de (2) et (2'):

$$(4)\qquad \begin{cases} a - a'\cos\Phi = a_1\sin\Phi, \\ a' - a\cos\Phi = a'_1\sin\Phi; \end{cases}$$

$$(4')\qquad \begin{cases} a_1 + a'_1\cos\Phi = a\sin\Phi, \\ a'_1 + a_1\cos\Phi = a'\sin\Phi. \end{cases}$$

Ces mêmes formules (3) prises conjointement avec les systèmes (i) et (i'), nous donnent aussi les cosinus directeurs (α, β, γ) de OA et $(\alpha', \beta', \gamma')$ de OA'. On n'a effectivement qu'à supposer $\rho = \rho' = 1$, et il vient

$$(5)\qquad \alpha\sin\Phi = a\sin\varphi' + a'\sin\varphi = a_1\cos\varphi + a'_1\cos\varphi',$$

$$(6)\qquad \alpha'\sin\Phi = -a_1\sin\varphi + a'_1\sin\varphi' = -a\cos\varphi' + a'\cos\varphi.$$

Dans le cas particulier où l'angle Φ serait droit, on aurait simplement

$$(5')\qquad \alpha = a\cos\varphi + a'\sin\varphi,$$

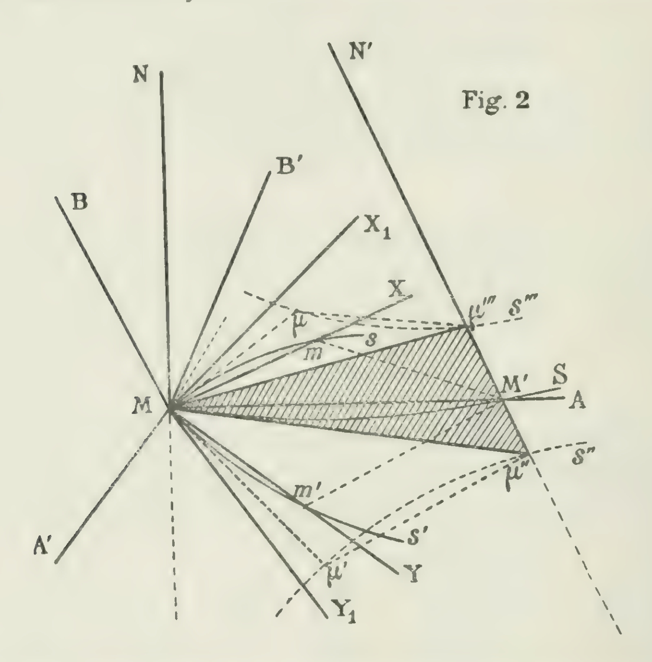
$$(6')\qquad \alpha' = -a\sin\varphi + a'\cos\varphi.$$

Toutes les relations que nous venons d'établir sont générales, que Φ soit aigu ou obtus et que $\varphi + \varphi' = \Phi$ soit une somme arithmétique ou géométrique, pourvu que φ' soit *consécutif* de φ, c'est-à-dire que son premier côté soit le second côté de ce dernier angle.

II.

Lignes coordonnées.

4. Les coordonnées d'un point quelconque M d'une surface $F(x, y, z) = 0$, pouvant être considérées, comme des fonctions de deux variables u et u', la surface elle-même, on le sait, peut être regardée comme engendrée par un double système de courbes (s), (s') se coupant entr'elles *rigoureusement*, de manière à produire un réseau continu de quadrilatères infinitésimaux *fermés*.



Soient $Mm = ds$ et $Mm' = ds'$, deux arcs élémentaires des lignes (s) et (s'). Si l'on suppose les cordes de ces arcs ou ces arcs eux-mêmes dirigés suivant les axes coordonnés MX, MY (n° 1), le plan des XY ou des $X_1 Y_1$, sera, au point M, le plan tangent à la surface F.

En devenant (s'') et (s''') après leur variation, les courbes génératrices se rencontrent encore en un nouveau point M', extrémité de l'arc résultant dS et quatrième sommet du quadrilatère fermé $M\,m\,M'm'$. Mais si l'on conçoit que la surface éprouve, tout autour du point M, une déformation infiniment petite suivant une loi donnée, alors m deviendra μ

et m' deviendra μ'. Quant à M' qui résulte du déplacement des deux lignes coordonnées à la fois (et c'est là le cas général) il se dédouble en μ'' et μ'''.

Au lieu de la normale $M'N'$ à la surface primitive F, en M', nous aurons dès-lors à considérer la ligne de jonction $\mu''\mu'''$ qui, sans être communément une normale de la surface, aura toutefois, par hypothèse, une direction bien déterminée. Nous dirons qu'elle est une *pseudo-normale* par rapport à la *surface* F, en faisant voir tout-à-l'heure qu'elle n'est autre cependant que la *verticale* au plan horizontal XMY pris dans la position infiniment voisine qui amène M en M'.

Rien n'empêche du reste, pour le calcul, de substituer aux points μ'' et μ''' le pied, quel qu'il soit exactement, de cette verticale, puisque ces deux premiers points sont en général distants d'un infiniment petit du 2ème ordre du plan horizontal primitif. Entr'autres avantages nous y trouverons celui de pouvoir remplacer par l'aire du quadrilatère fermé $MmM'm'$ les aires des deux triangles contigus $M\mu\mu'''$ et $M\mu'\mu''$, éléments constitutifs de la *pseudo-surface* **F** correspondante à la déformation particulière considérée.

On voit d'après cela que la ligne de jonction $\mu''\mu'''$ ou la pseudo-normale $M'N'$ se trouve, par rapport au nouveau quadrilatère fermé, dont M' va être le 1er sommet, dans les mêmes conditions que la verticale MN l'est par rapport au quadrilatère $MmM'm'$. Et comme ce dernier quadrilatère, bien que fermé, n'appartient pas, en général, rigoureusement à la surface F, les deux directions consécutives MN, $M'N'$, dont la seconde au moins est une pseudo-normale par rapport à F, pourront, à bon droit, être regardées comme deux *vraies normales* consécutives de la *pseudo-surface* **F**, et, par suite, comme les verticales à deux de ses plans tangents infiniment voisins, l'un au point M, l'autre au point M'.

5. Définitions et notations. — Soient $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ les premières courbures proprement dites ou *absolues* des lignes (s) et (s') en M, courbures que nous supposerons portées, comme les rayons R et R' eux mêmes, sur les normales principales correspondantes et qui, par conséquent, seront respectivement situées sur les faces Y_1MZ et X_1MZ du trièdre *supplémentaire* MX_1Y_1Z. Soient enfin $d\varsigma_X$, $d\varsigma'_Y$ les angles de contingence. La projection d'un triangle isocèle infinitésimal ayant l'unité

pour côté, sur l'axe fixe Ox, nous donnant

$$a + d\varsigma_X \cos(R, x) - (a + da) = 0,$$
$$a' + d\varsigma'_Y \cos(R', x) - (a' + da') = 0,$$

et sachant, d'autre part, que, par définition, $\frac{d\varsigma_X}{ds} = \frac{1}{R}$ et $\frac{d\varsigma'_Y}{ds'} = \frac{1}{R'}$, on en conclut

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{\cos(R, x)}{R}, \qquad \frac{\partial a'}{\partial s'} = \frac{\cos(R', x)}{R'}.$$

Si maintenant, guidé par l'analogie, on pose

$$\frac{d\varsigma_Y}{ds} = \frac{1}{M}, \qquad \frac{d\varsigma'_X}{ds'} = \frac{1}{N'},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial a'}{\partial s} = \frac{\cos(M, x)}{M}, \qquad \frac{\partial a}{\partial s'} = \frac{\cos(N', x)}{N'},$$

les nouvelles courbures $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{N'}$ qui empruntent, pour leur formation, l'arc à une série et l'angle de contingence à l'autre, recevront convenablement le nom de courbures *corrélatives* ou *alternantes* des lignes coordonnées (s) et (s'). On voit en effet que, puisque, par hypothèse, les distances à l'origine des points m et μ ne diffèrent entr'elles que d'un infiniment petit du second ordre, $\frac{1}{M}$ est le rapport, à l'arc ds, de l'angle de contingence $d\varsigma_Y$ que font entr'elles les tangentes menées aux courbes (s') et (s''') aux points M et μ, la seconde de ces tangentes étant supposée, selon l'usage, transportée parallèlement à elle-même en M. Pareillement, $\frac{1}{N'}$ est le rapport, à l'arc ds', de l'angle $d\varsigma'_X$ que font les tangentes aux courbes (s) et (s'') en M et μ'.

Mais, disons-le tout-de-suite, il nous sera bien plus avantageux d'introduire dans nos formules les *projections* de ces courbures sur le plan horizontal et sur la verticale MZ ou, autrement dit, leurs *composantes* horizontales et verticales.

Sans explications nouvelles, qui ne pourraient être que fastidieuses, nous complèteront, dès le paragraphe suivant, le tableau de ces composantes par l'introduction de celles provenant des dérivées partielles $\frac{\partial a''}{\partial s}$, $\frac{\partial a''}{\partial s'}$, grâce à l'intermédiaire des angles de contingence $d\varsigma_Z$, $d\varsigma'_Z$ dûs eux-mêmes aux couples de normales issues de M et m, d'une part, de M et m', d'autre part.

III.

Relations de première espèce.

(Dérivées partielles).

6. I. — Dérivées partielles relatives aux arêtes du trièdre $MXYZ$. — Désignons par (a'', b'', c'') ou (a''_1, b''_1, c''_1), équivalemment, les cosinus directeurs de MZ ou MZ_1. Le théorème de la projection de la résultante et de ses deux composantes nous permet d'écrire immédiatement

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= \frac{\cos(R,\ x)}{R} = \frac{a'_1}{R_{Y_1}} + \frac{a''_1}{R_{Z_1}}, \\ \frac{\partial a'}{\partial s} &= \frac{\cos(M,\ x)}{M} = \frac{a''_1}{M_{Z_1}} + \frac{a_1}{M_{X_1}}, \\ \frac{\partial a''}{\partial s} &= \frac{\cos(N,\ x)}{N} = \frac{a_1}{N_{X_1}} + \frac{a'_1}{N_{Y_1}}; \end{aligned}\right.$$

$$(a')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s'} &= \frac{\cos(N',\ x)}{N'} = \frac{a'_1}{N'_{Y_1}} + \frac{a''_1}{N'_{Z_1}}, \\ \frac{\partial a'}{\partial s'} &= \frac{\cos(R',\ x)}{R'} = \frac{a''_1}{R'_{Z_1}} + \frac{a_1}{R'_{X_1}}, \\ \frac{\partial a''}{\partial s'} &= \frac{\cos(M',\ x)}{M'} = \frac{a_1}{M'_{X_1}} + \frac{a'_1}{M'_{Y_1}}. \end{aligned}\right.$$

Ceci posé, différentions, d'abord par rapport à s, puis à s', la relation connue

$$(b)\qquad aa' + bb' + cc' = \cos\Phi;$$

il viendra

$$\sum a\frac{\partial a'}{\partial s} + \sum a'\frac{\partial a}{\partial s} = -\sin\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial s},$$

. . . .

Effectuant les calculs, on obtient les identités suivantes :

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{1}{M_{X_1}} &= \frac{1}{R_{Y_1}} + \frac{\partial\Phi}{\partial s}, \\ -\frac{1}{R'_{X_1}} &= \frac{1}{N'_{Y_1}} + \frac{\partial\Phi}{\partial s'}, \end{aligned}\right.$$

dont il sera fait ultérieurement un fréquent usage.

D'autre part, nous avons aussi entre nos cosinus les deux autres

relations

$$(b')\qquad \begin{cases} a a'' + b b'' + c c'' = 0, \\ a' a'' + b' b'' + c' c'' = 0. \end{cases}$$

En les différentiant à leur tour par rapport à s et à s', on en déduit

$$\frac{\sin\Phi}{N_{X_1}} + \frac{1}{R_{Z_1}} = 0, \qquad \frac{\sin\Phi}{N_{Y_1}} + \frac{1}{M_{Z_1}} = 0,$$
$$\frac{\sin\Phi}{M'_{X_1}} + \frac{1}{N'_{Z_1}} = 0, \qquad \frac{\sin\Phi}{M'_{Y_1}} + \frac{1}{R'_{Z_1}} = 0;$$

ce qui permet d'éliminer quatre composantes (sur douze) et de donner, notamment, aux dérivées $\frac{\partial a''}{\partial s}$, $\frac{\partial a''}{\partial s'}$, la forme qui suit :

$$(d)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a''}{\partial s}\sin\Phi = -\dfrac{a_1}{R_{Z_1}} - \dfrac{a'_1}{M_{Z_1}}, \\ \dfrac{\partial a''}{\partial s'}\sin\Phi = -\dfrac{a_1}{N'_{Z_1}} - \dfrac{a'_1}{R'_{Z_1}}. \end{cases}$$

7. Ces premières formules établies, posons, pour en simplifier l'écriture et nous rapprocher des notations de la Cinématique :

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathrm{p}_1 = \dfrac{1}{M_{Z_1}}, & \mathrm{p}'_1 = \dfrac{1}{R'_{Z_1}}, \\ \mathrm{q}_1 = -\dfrac{1}{R_{Z_1}}, & \mathrm{q}'_1 = -\dfrac{1}{N'_{Z_1}}, \\ \mathrm{r}_1 = \dfrac{1}{R_{Y_1}}, & \mathrm{r}'_1 = \dfrac{1}{N'_{Y_1}}, \\ \mathrm{n}_1 = -\dfrac{1}{M_{X_1}}; & \mathrm{n}'_1 = -\dfrac{1}{R'_{X_1}}. \end{cases}$$

Substituant dans (a), (a') et (d), il vient, pour remplacer le tout :

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial s} = a'_1\mathrm{r}_1 - a''_1\mathrm{q}_1, \\ \dfrac{\partial a'}{\partial s} = a''_1\mathrm{p}_1 - a_1\mathrm{n}_1, \\ \dfrac{\partial a''}{\partial s}\sin\Phi = a_1\mathrm{q}_1 - a'_1\mathrm{p}_1, \end{cases}$$

conjointement avec

$$(8')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial s'} = a'_1\mathrm{r}'_1 - a''_1\mathrm{q}'_1, \\ \dots\dots\dots\dots ; \end{cases}$$

ce second système ne différant du premier que par les accents de ses composantes. On en tirera aussitôt

$$(9)\quad \begin{cases} p_1 = \sum a''_1 \dfrac{\partial a'}{\partial s} = -\sum a' \dfrac{\partial a''_1}{\partial s}, \\ q_1 = \sum a \dfrac{\partial a''_1}{\partial s} = -\sum a''_1 \dfrac{\partial a}{\partial s}, \\ r_1 = \sum a'_1 \dfrac{\partial a}{\partial s} = -\sum a \dfrac{\partial a'_1}{\partial s}, \\ n_1 = \sum a' \dfrac{\partial a_1}{\partial s} = -\sum a_1 \dfrac{\partial a'}{\partial s}; \end{cases}$$

et, de même,

$$(9')\quad \begin{cases} p'_1 = \sum a''_1 \dfrac{\partial a'}{\partial s'} = -\sum a' \dfrac{\partial a''_1}{\partial s'}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

De là cette conclusion : que toute fonction des composantes p_1, q_1, ... peut s'exprimer au moyen des cosinus (a, b, c), (a', b', c') des tangentes aux lignes coordonnées et des variations de ces cosinus.

Observons enfin, avant de passer outre, qu'avec ces nouvelles notations, les identités (c) deviennent

$$(10)\quad \begin{cases} n_1 = r_1 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}, \\ n'_1 = r'_1 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial s'}. \end{cases}$$

8. II. — Dérivées partielles relatives au trièdre MX_1Y_1Z. — Différentions, par rapport à nos variables, les formules (4′) ci-dessus et posons dans les résultats

$$(11)\quad \begin{cases} p \sin\Phi = p_1 + q_1 \cos\Phi, & r = r_1, \\ q \sin\Phi = q_1 + p_1 \cos\Phi_1, & n = n_1, \end{cases}$$

avec des expressions analogues en p', q', r', n'; nous formerons ainsi les deux nouveaux systèmes de relations principales, corrélatifs de (8) et de (8′), savoir :

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial s} = a' n - a'' q, \\ \dfrac{\partial a'_1}{\partial s} = a'' p - a r, \\ \dfrac{\partial a''_1}{\partial s} \sin\Phi = a q - a' p, \end{cases}$$

avec

$$(12') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial a_1}{\partial s'} = a'\mathrm{n}' - a''\mathrm{q}', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

On en déduit

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{p} = \sum a'' \dfrac{\partial a'_1}{\partial s} = - \sum a'_1 \dfrac{\partial a''}{\partial s}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

et l'on a, en outre, pour correspondre à (11) :

$$(11') \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{p}_1 \sin\Phi = \mathrm{p} - \mathrm{q}\cos\Phi, & \mathrm{r}_1 = \mathrm{r}, \\ \mathrm{q}_1 \sin\Phi = \mathrm{q} - \mathrm{p}\cos\Phi; & \mathrm{n}_1 = \mathrm{n}. \end{array} \right.$$

9. Au sujet de ces formules (11) et (11'), il importe d'observer que, rapprochées des formules (2'), elles démontrent, à vue, que les quantités p, q, r et p_1, q_1, r_1 peuvent être regardées comme les projections *orthogonales* d'un même segment issu de l'origine (la cinématique en donne aussi l'explication). Ainsi en est-il d'ailleurs pour p', q', r' et p'_1, q'_1, r'_1.

À ce point de vue, si nous représentons par p, q, r et p_1, q_1, r_1 les projections *obliques* qui correspondent au premier, notamment, de ces segments, il résulte de nos formules (1) et (1') qu'on peut écrire

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} p + q\cos\Phi = \mathrm{p} = p_1 \sin\Phi, & r = \mathrm{r} = r_1, \\ q + p\cos\Phi = \mathrm{q} = q_1 \sin\Phi; & n = \mathrm{n} = n_1; \end{array} \right.$$

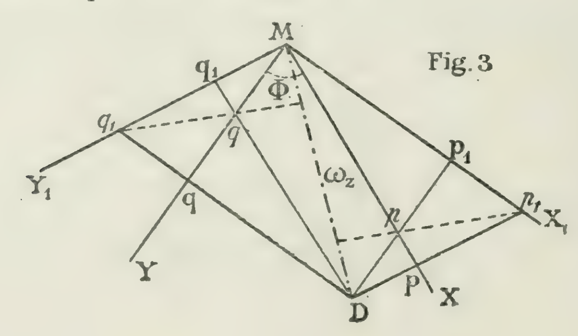
d'où, les relations inverses

$$(14') \qquad \left\{ \begin{array}{ll} p_1 - q_1\cos\Phi = \mathrm{p}_1 = p\sin\Phi, & r_1 = \mathrm{r}_1 = r, \\ q_1 - p_1\cos\Phi = \mathrm{q}_1 = q\sin\Phi; & n_1 = \mathrm{n}_1 = n. \end{array} \right.$$

De (14) et (14') on tire comme corollaire :

$$(15) \qquad p^2 + q^2 + 2pq\cos\Phi = p_1^2 + q_1^2 - 2p_1q_1\cos\Phi = \omega_Z^2,$$

et il est à peine besoin d'ajouter que la variable s' fournirait pour $\omega_Z'^2$ des résultats semblables. La figure ci-jointe présente du reste comme le résumé de tout ce que nous venons de dire.



10. α. A titre d'application de nos principales formules, on peut former les identités suivantes :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a''_1}{\partial s} & \frac{\partial a''_1}{\partial s'} \\ \frac{\partial b''_1}{\partial s} & \frac{\partial b''_1}{\partial s'} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a'_1 \\ b_1 & b'_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin^2 \Phi}(\mathrm{p}\,\mathrm{q}' - \mathrm{q}\,\mathrm{p}') = K'',$$

ou, équivalemment, à cause de $a'' = a''_1$, etc.,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a''}{\partial s} & \frac{\partial a''}{\partial s'} \\ \frac{\partial b''}{\partial s} & \frac{\partial b''}{\partial s'} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin^2 \Phi}(\mathrm{p}_1 \mathrm{q}'_1 - \mathrm{q}_1 \mathrm{p}'_1) = K''_1.$$

C'est une double forme du rapport *généralisé* de Gauss, relatif à la courbure totale des surfaces. On en conclut l'identité

$$(16) \qquad \mathrm{p}\,\mathrm{q}' - \mathrm{q}\,\mathrm{p}' = \mathrm{p}_1 \mathrm{q}'_1 - \mathrm{q}_1 \mathrm{p}'_1,$$

qu'on peut aussi écrire (n° 9) :

$$(16') \qquad K''_1 = p_1 q'_1 - q_1 p'_1 = p\,q' - q\,p' = K''.$$

β. Ajoutons que, grâce aux formules (14), le système général (8) peut aussi s'écrire :

$$(8^{\text{bis}}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial s} = a'_1 r - a''_1 q \sin \Phi, \\ \dfrac{\partial a'}{\partial s} = a''_1 p \sin \Phi - a_1 n, \\ \dfrac{\partial a''}{\partial s} = a_1 q - a'_1 p. \end{cases}$$

Le système corrélatif (12) devient, à son tour,

$$(12^{\text{bis}}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial s} = a' n_1 - a'' q_1 \sin \Phi, \\ \dfrac{\partial a'_1}{\partial s} = a'' p_1 \sin \Phi - a\, r_1, \\ \dfrac{\partial a''_1}{\partial s} = a q_1 - a' p_1. \end{cases}$$

formules d'un maniement plus facile que celles dont elles proviennent.

IV.

Relations de deuxième espèce.

(Dérivées totales).

11. I. — Dérivées totales relatives aux arêtes du trièdre $MXYZ$. — Remarquons d'abord que l'arc MM' ou dS est une fonction composée des deux variables indépendantes s et s' ; car l'un quelconque des triangles dans lesquels se décompose le quadrilatère infinitésimal $MmM'm'$ donne

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{ds}{\sin\varphi'} = \frac{ds'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{\sin\Phi}, \\ &dS^2 = ds^2 + ds'^2 + 2\,ds\,ds'\cos\Phi \quad ^{*}). \end{aligned}\right.$$

D'après cela, on a

$$\frac{da}{dS} = \frac{\partial a}{\partial s}\,\frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi} + \frac{\partial a}{\partial s'}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi},$$

avec des expressions analogues pour $\frac{da'}{dS}$, $\frac{da''}{dS}$. Or, si l'on remplace les dérivées partielles des seconds membres par leurs valeurs (8) et (8') et qu'on pose

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &P_1 \sin\Phi = p_1 \sin\varphi' + p_1' \sin\varphi, \\ &Q_1 \sin\Phi = q_1 \sin\varphi' + q_1' \sin\varphi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

---

*) Formes diverses de *l'élément linéaire dS*, utiles à connaître :

$$dS^2 = ds^2 + ds'^2 + 2\,ds\,ds'\cos\Phi = \frac{1}{\sin^2\Phi}(d\mathrm{s}_1^2 + d\mathrm{s}_1'^2 + 2\,d\mathrm{s}_1\,d\mathrm{s}_1'\cos\Phi),$$

$$= ds_1^2 + ds_1'^2 - 2\,ds_1\,ds_1'\cos\Phi = \frac{1}{\sin^2\Phi}(d\mathrm{s}^2 + d\mathrm{s}'^2 - 2\,d\mathrm{s}\,d\mathrm{s}'\cos\Phi).$$

Posant

$$d\mathrm{s} = d\sigma + d\sigma', \qquad d\mathrm{s}' = d\sigma - d\sigma',$$

puis

$$d\mathrm{s}_1 = d\sigma_1 + d\sigma_1', \qquad d\mathrm{s}_1' = d\sigma_1 - d\sigma_1',$$

il vient encore, successivement :

$$dS^2 = \frac{d\sigma^2}{\cos^2\frac{\Phi}{2}} + \frac{d\sigma'^2}{\sin^2\frac{\Phi}{2}} = \frac{d\sigma_1^2}{\sin^2\frac{\Phi}{2}} + \frac{d\sigma_1'^2}{\cos^2\frac{\Phi}{2}},$$

composantes orthogonales, égales deux-à-deux et dirigées suivant les *bissectrices* des axes coordonnés.

ce qui entraîne, notamment, (14′) :

$$(18') \quad \begin{cases} P_1 = p \sin\varphi' + p' \sin\varphi, \\ Q_1 = q \sin\varphi' + q' \sin\varphi, \\ R_1 \sin\Phi = r \sin\varphi' + r' \sin\varphi, \\ N_1 \sin\Phi = n \sin\varphi' + n' \sin\varphi, \end{cases}$$

on obtiendra le système résultant ou total

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{da}{dS} = a'_1 R_1 - a''_1 Q_1, \\ \dfrac{da'}{dS} = a''_1 P_1 - a_1 N_1, \\ \dfrac{da''}{dS} \sin\Phi = a_1 Q_1 - a'_1 P_1. \end{cases}$$

Comme vérification, et en vue surtout d'une identité importante qu'elle nous amenera, nous allons donner une démonstration à part de la dernière formule de ce système.

A cet effet, différentions par rapport à S la valeur

$$aa' + bb' + cc' = \cos\Phi.$$

Nous aurons

$$\sum a \frac{da'}{dS} + \sum a' \frac{da}{dS} = -\sin\Phi \frac{d\Phi}{dS}.$$

Substituant à $\frac{da}{dS}$, $\frac{da'}{dS}$ les deux expressions ci-dessus (qu'on suppose déjà connues) on obtient l'identité

$$(20) \quad N_1 = R_1 + \frac{d\Phi}{dS},$$

qui est la généralisation des identités (10) et que, à cause de $\varphi + \varphi' = \Phi$, l'on peut aussi écrire

$$(20') \quad N_1 - \frac{d\varphi'}{dS} = R_1 + \frac{d\varphi}{dS}.$$

En s'aidant de ce résultat dans la différentiation, par rapport à S, de la formule connue

$$a'' \sin\Phi = bc' - cb',$$

on retrouve pour $\frac{da''}{dS}$ la valeur donnée plus haut.

12. II. — Dérivées totales relatives aux arêtes du trièdre MX_1Y_1Z. — Nous partirons des égalités suivantes :

$$\frac{da_1}{dS} = \frac{\partial a_1}{\partial s}\frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi} + \frac{\partial a_1}{\partial s'}\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi},$$

. . . .

Après y avoir substitué les valeurs (12) et (12′), on est conduit à poser

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} P\sin\Phi &= \mathrm{p}\sin\varphi' + \mathrm{p}'\sin\varphi,\\ Q\sin\Phi &= \mathrm{q}\sin\varphi' + \mathrm{q}'\sin\varphi,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

ce qui entraine, entr'autres formes celle-ci, (14):

$$(21')\quad \left\{\begin{aligned} P &= p_1\sin\varphi' + p'_1\sin\varphi,\\ Q &= q_1\sin\varphi' + q'_1\sin\varphi,\\ R\sin\Phi &= r_1\sin\varphi' + r'_1\sin\varphi,\\ N\sin\Phi &= n_1\sin\varphi' + n'_1\sin\varphi.\end{aligned}\right.$$

Finalement, il vient comme système total, corrélatif de (19):

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{da_1}{dS} &= a'N - a''Q,\\ \frac{da'_1}{dS} &= a''P - aR,\\ \frac{da''_1}{dS}\sin\Phi &= aQ - a'P.\end{aligned}\right.$$

Voici, pour terminer ce chapitre, quelques remarques:

α. Du double calcul qui précède, on conclut, par analogie avec (9):

$$(18'')\quad P_1 = \sum a''_1\frac{da'}{dS} = -\sum a'\frac{da''_1}{dS} = \frac{1}{\sin\Phi}(P - Q\cos\Phi),$$

$$(21'')\quad P = \sum a''\frac{da'_1}{dS} = -\sum a'_1\frac{da''}{dS} = \frac{1}{\sin\Phi}(P_1 + Q_1\cos\Phi).$$

β. En rapprochant les expressions diverses des dérivées partielles ou totales des cosinus directeurs relatifs à la normale MN, on a:

$$(a'')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a''}{\partial s} &= a_1 q - a'_1 p = a q_1 - a' p_1 = \frac{\partial a''_1}{\partial s},\\ \frac{\partial a''}{\partial s'} &= a_1 q' - a'_1 p' = a q'_1 - a' p'_1 = \frac{\partial a''_1}{\partial s'},\\ \frac{da''}{dS}\sin\Phi &= a_1 Q_1 - a'_1 P_1 = aQ - a'P = \frac{da''_1}{dS}\sin\Phi.\end{aligned}\right.$$

Chapitre II.

COURBURES DE DIVERS ORDRES D'UNE LIGNE QUELCONQUE TRACÉE SUR UNE PSEUDO-SURFACE.

I.

Application des relations précédentes à l'analyse des premières courbures ou déviations d'une ligne quelconque tracée sur une pseudo-surface.

13. Lorsque, sur la pseudo-surface **F**, tangente, à l'origine, au plan des XY, on passe du point M au point infiniment voisin M', dans la direction MA, la variation de cette tangente MA, menée à la courbe *résultante* (S), produite elle-même par les lignes coordonnées (s) et (s'), détermine la variation simultanée de la verticale MN et celle de la tangente MA' à la trajectoire orthogonale de (S).

Désignons par $d\sigma$, $d\upsilon$, $d\varepsilon$ les angles de contingence ainsi engendrés et posons

$$\frac{1}{\rho_\sigma}=\frac{d\sigma}{dS}, \quad \frac{1}{\rho_\upsilon}=\frac{d\upsilon}{dS}, \quad \frac{1}{\rho_\varepsilon}=\frac{d\varepsilon}{dS}.$$

Dans $\frac{1}{\rho_\sigma}$, on reconnait la première courbure proprement dite de la ligne (S). Nous l'appellerons, plus spécialement ici, la *déviation initiale* ou *donnée*. Pour en simplifier la notation, nous conviendrons de la désigner aussi par $\frac{1}{\rho}$, toutes les fois que la symétrie des formules n'exigera pas l'indice.

Quant aux deux autres courbures, nous les qualifierons respectivement de *déviation horizontale* et de *déviation verticale* de cette même ligne (S), à cause du lien de dépendance qui les rattache à sa tangente

MA. Il s'agit de décomposer ces trois déviations en leurs éléments constitutifs.

1° *Déviation initiale.* — Rappelons d'abord que les cosinus directeurs de MA et de MA' étant, respectivement, (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, les formules préliminaires (5) et (6) nous en ont fait connaître une double expression.

Cela étant, soient $(a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma)$ les cosinus directeurs de la normale principale MB (Fig. 2) de la courbe (S). On a les relations connues:

$$\frac{\alpha_\sigma}{d\alpha} = \frac{\beta_\sigma}{d\beta} = \frac{\gamma_\sigma}{d\gamma} = \frac{1}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}} = \frac{1}{d\sigma} = \frac{\rho_\sigma}{dS}.$$

Nous sommes ainsi conduit à calculer $\frac{d\alpha}{dS}$, par exemple, en fonction des diverses courbures, en M, des lignes coordonnées et de la variation de l'angle Φ. Or, d'après (5),

$$\alpha = a\frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi} + a'\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi};$$

par conséquent

$$\frac{d\alpha}{dS} = \frac{da}{dS}\frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi} + \frac{da'}{dS}\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi} + a\frac{d}{dS}\left(\frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi}\right) + a'\frac{d}{dS}\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}\right).$$

Substituant à $\frac{da}{dS}$, $\frac{da'}{dS}$ leur valeur (19) et développant les deux dernières dérivées, on trouve, eu égard aux relations (18') et à l'identité (20),

$$\frac{d\alpha}{dS} = \alpha'\left(R_1 + \frac{d\varphi}{dS}\right) + \frac{a''}{\sin\Phi}(P_1\sin\varphi - Q_1\sin\varphi').$$

Posons

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho'} &= R_1 + \frac{d\varphi}{dS},\\ \frac{\sin\Phi}{\rho''} &= P_1\sin\varphi - Q_1\sin\varphi'; \end{aligned}\right.$$

il viendra

$$\frac{d\alpha}{dS} = \frac{\alpha'}{\rho'} + \frac{a''}{\rho''},$$

et, par suite,

$$\sum\left(\frac{d\alpha}{dS}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{dS}\right)^2 = \frac{1}{\rho_\sigma^2} = \frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2}.$$

Ainsi, par les formules (23), nous connaissons les expressions générales

des deux composantes, horizontale et verticale, de la déviation donnée $\frac{1}{\rho_\sigma}$, ou $\frac{1}{\rho}$.

Comme corollaire, on voit que l'on a aussi

$$\frac{1}{\rho'} = \sum \alpha' \frac{d\alpha}{dS} = -\sum \alpha \frac{d\alpha'}{dS},$$

$$\frac{1}{\rho''} = \sum a'' \frac{d\alpha}{dS} = -\sum \alpha \frac{da''}{dS}.$$

2° *Déviation horizontale.* — Soit MC (fig. 4) la direction du rayon ρ_υ de cette nouvelle courbure, direction nécessairement située dans le plan normal NMA. Représentons par $(\alpha_\upsilon, \beta_\upsilon, \gamma_\upsilon)$ les cosinus directeurs; nous aurons

$$\frac{\alpha_\upsilon}{d\alpha'} = \frac{\beta_\upsilon}{d\beta'} = \frac{\gamma_\upsilon}{d\gamma'} = \frac{1}{\sqrt{d\alpha'^2 + d\beta'^2 + d\gamma'^2}} = \frac{1}{d\upsilon} = \frac{\rho_\upsilon}{dS}.$$

Il s'agit de calculer $\frac{d\alpha'}{dS}$. Or, d'après (6),

$$\alpha' = -a\frac{\cos\varphi'}{\sin\Phi} + a'\frac{\cos\varphi}{\sin\Phi}.$$

Différentiant, on trouve, après réductions :

$$\frac{d\alpha'}{dS} = -\alpha\left(R_1 + \frac{d\varphi}{dS}\right) + \frac{a''}{\sin\Phi}(P_1\cos\varphi + Q_1\cos\varphi').$$

Posant ensuite

$$(24)\qquad \frac{\sin\Phi}{\rho_0} = P_1\cos\varphi + Q_1\cos\varphi',$$

il vient

$$\frac{d\alpha'}{dS} = -\frac{\alpha}{\rho'} + \frac{a''}{\rho_0};$$

d'où

$$\sum\left(\frac{da'}{dS}\right)^2 = \left(\frac{d\upsilon}{dS}\right)^2 = \frac{1}{\rho_\upsilon^2} = \frac{1}{\rho''^2} + \frac{1}{\rho_0^2}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{\rho'} = -\sum \alpha\frac{d\alpha'}{dS} = \sum \alpha'\frac{d\alpha}{dS},$$

$$\frac{1}{\rho_0} = \sum a''\frac{d\alpha'}{dS} = -\sum \alpha'\frac{da''}{dS}.$$

3° *Déviation verticale.* — Désignons par ME (Fig. 4), la direction du rayon ρ_ε de cette courbure, et soient $(\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon, \gamma_\varepsilon)$ ses cosinus direc-

teurs. Comme ceux de MN sont (a'', b'', c''), nous avons

$$\frac{\alpha_\varepsilon}{d a''} = \frac{\beta_\varepsilon}{d b''} = \frac{\gamma_\varepsilon}{d c''} = \frac{1}{\sqrt{d a''^2 + d b''^2 + d c''^2}} = \frac{1}{d \varepsilon} = \frac{\rho_\varepsilon}{d S} \text{ *)}.$$

Il n'y a pas lieu ici de calculer $\frac{d a''}{d S}$ qui nous est donné directement par la troisième des formules (19), savoir :

$$\frac{d a''}{d S} \sin \Phi = a_1 Q_1 - a_1' P_1 .$$

D'autre part, des formules (5) et (6), on tire

$$a_1 = \alpha \sin \varphi' - \alpha' \cos \varphi',$$
$$a_1' = \alpha \sin \varphi + \alpha' \cos \varphi .$$

Substituant, on a

$$\frac{d a''}{d S} \sin \Phi = - \alpha (P_1 \sin \varphi - Q_1 \sin \varphi') - \alpha'(P_1 \cos \varphi + Q_1 \cos \varphi'),$$

ou encore, d'après (23) et (24) :

$$- \frac{d a''}{d S} = \frac{\alpha}{\rho''} + \frac{\alpha'}{\rho_0} .$$

On en déduit

$$\sum \left(\frac{d a''}{d S}\right)^2 = \left(\frac{d \varepsilon}{d S}\right)^2 = \frac{1}{\rho_\varepsilon^2} = \frac{1}{\rho''^2} + \frac{1}{\rho_0^2} ,$$

avec

$$\frac{1}{\rho''} = - \sum \alpha \frac{d a''}{d S} = \sum a'' \frac{d \alpha}{d S} ,$$

$$\frac{1}{\rho_0} = - \sum \alpha' \frac{d a''}{d S} = \sum a'' \frac{d \alpha'}{d S} .$$

En résumé, si l'on observe que $\frac{1}{\rho'}$ est une courbure de niveau, $\frac{1}{\rho''}$, une courbure de profil et $\frac{1}{\rho_0}$, une courbure de front, on peut dire :

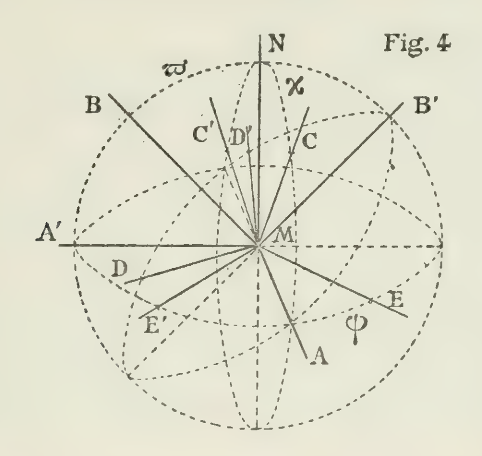
α. La déviation initiale est la résultante orthogonale de la première courbure de niveau et de la première courbure de profil.

β. La déviation horizontale est la résultante orthogonale de la première courbure de niveau et de la première courbure de front.

---

*) On observera que l'arc $d\upsilon$, non moins que l'arc $d\varepsilon$, est une *représentation sphérique* ou une *image* de l'arc dS. A ce point de vue, la notation, très expressive, $d\Sigma$, conviendrait au premier de ces arcs tout aussi bien qu'au second, si l'usage n'en avait jusqu'ici décidé autrement.

γ. La déviation verticale est la résultante orthogonale de la première courbure de profil et de la première courbure de front.



14. Donnons, avant de terminer, quelques expressions fort utiles de ces courbures *élémentaires* que nos calculs viennent de mettre en évidence.

A cet effet, représentons par ϖ, l'angle aigu du plan osculateur AMB de la ligne (S) et du plan de profil; par χ, l'angle aigu du plan $A'MC$ de la déviation horizontale et du plan de front; par ψ, l'angle aigu du plan NME de la déviation verticale et du plan de profil, nous pourrons, comme conséquence des valeurs trouvées, écrire les trois systèmes suivants :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\rho'} = \frac{\sin\varpi}{\rho_\sigma}, \quad \frac{1}{\rho_0} = \frac{\cos\chi}{\rho_\upsilon}, \quad \frac{1}{\rho''} = -\frac{\cos\psi}{\rho_\varepsilon},\\ &\frac{1}{\rho''} = \frac{\cos\varpi}{\rho_\sigma}, \quad \frac{1}{\rho'} = -\frac{\sin\chi}{\rho_\upsilon}, \quad \frac{1}{\rho_0} = \frac{\sin\psi}{\rho_\varepsilon}, \end{aligned}\right.$$

et, par suite, les trois équations

$$(25')\quad \left\{\begin{aligned} \sin\varpi\, d\sigma &= -\sin\chi\, d\upsilon,\\ -\cos\psi\, d\varepsilon &= \cos\varpi\, d\sigma,\\ \cos\chi\, d\upsilon &= \sin\psi\, d\varepsilon; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on voit qu'en supposant $\frac{1}{\rho_\sigma}$ et $d\sigma$ positifs, il est nécessaire (puisque les angles ϖ, χ, ψ ont été choisis aigus) que les quantités $\frac{1}{\rho_\upsilon}$, $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$, $d\upsilon$, $d\varepsilon$ soient désormais considérées dans nos formules comme implicitement *négatives*.

Des égalités précédentes, nous déduisons cette relation fort simple

$$\operatorname{tg} \varpi = \operatorname{tg} \chi \operatorname{tg} \psi, \tag{26}$$

laquelle donne lieu à l'énoncé suivant.

THÉORÈME. — *En tout point d'une courbe quelconque appartenant à une pseudo-surface : 1° le plan tangent ou horizontal et le plan de la déviation donnée : 2° le plan de front et le plan de la déviation horizontale : 3° le plan de profil et le plan de la déviation verticale, forment entr'eux trois angles tels que, si, dans chaque couple, on prend l'angle aigu correspondant le produit de leurs tangentes trigonométriques est toujours égal à l'unité.*

COROLLAIRE. — Des trois systèmes (25), on peut déduire aussi l'expression de chacune des différentielles $d\varpi$, $d\chi$, $d\psi$, en fonction des trois courbures élémentaires $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\rho''}$, $\frac{1}{\rho_0}$ et de leurs variations. On a, en effet,

$$\frac{1}{\rho_\sigma^2} d\varpi = \frac{1}{\rho''} d\left(\frac{1}{\rho'}\right) - \frac{1}{\rho'} d\left(\frac{1}{\rho''}\right),$$

$$\frac{1}{\rho_\upsilon^2} d\chi = \frac{1}{\rho'} d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) - \frac{1}{\rho_0} d\left(\frac{1}{\rho'}\right),$$

$$\frac{1}{\rho_\varepsilon^2} d\psi = \frac{1}{\rho_0} d\left(\frac{1}{\rho''}\right) - \frac{1}{\rho''} d\left(\frac{1}{\rho_0}\right);$$

d'où

$$\frac{\rho'\rho''}{\rho_\sigma^2} d\varpi + \frac{\rho_0\rho'}{\rho_\upsilon^2} d\chi + \frac{\rho''\rho_0}{\rho_\varepsilon^2} d\psi = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\varpi}{\sin 2\varpi} = \frac{d\chi}{\sin 2\chi} + \frac{d\psi}{\sin 2\psi},$$

relation différentielle qu'on peut, comme vérification, déduire directement de l'équation (26).

II.

De quelques formes remarquables de la déviation verticale.

15. Il résulte du paragraphe précédent que l'on a

$$(27) \quad \begin{cases} -\dfrac{\cos\psi}{\rho_\varepsilon} = \dfrac{1}{\rho''} = \dfrac{1}{\sin\Phi}(P_1 \sin\varphi - Q_1 \sin\varphi'), \\[2ex] \dfrac{\sin\psi}{\rho_\varepsilon} = \dfrac{1}{\rho_0} = \dfrac{1}{\sin\Phi}(P_1 \cos\varphi + Q_1 \cos\varphi'). \end{cases}$$

On en tire

$$(28) \qquad \frac{\sin^2\Phi}{\rho_\varepsilon^2} = P_1^2 + Q_1^2 + 2\,P_1\,Q_1\cos\Phi = \Omega_Z^2\sin^2\Phi.$$

C'est une première expression générale de la déviation verticale de la ligne (S). Quand les lignes coordonnées sont rectangulaires, elle devient $\left(\text{en observant que } \frac{1}{\rho_\varepsilon} \text{ est une abréviation de } \frac{1}{\rho_{\varepsilon,S}}\right)$:

$$(28') \qquad \frac{1}{\rho_\varepsilon^2} = (p\cos\varphi + p'\sin\varphi)^2 + (q\cos\varphi + q'\sin\varphi)^2.$$

Faisons, dans la formule (28), $\varphi = 0$, $\varphi' = \Phi$, puis, $\varphi = \Phi$, $\varphi' = 0$; nous obtiendrons pour les déviations verticales relatives aux lignes coordonnées (fig. 3):

$$(29) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{\varepsilon,s}^2} &= p^2 + q^2 + 2\,p\,q\cos\Phi = \omega_Z^2, \\ \frac{1}{\rho_{\varepsilon,s'}^2} &= p'^2 + q'^2 + 2\,p'\,q'\cos\Phi = \omega_Z'^2. \end{aligned}\right.$$

En désignant par V'' l'angle (ω_Z, ω_Z'), on en conclut cette seconde expression de $\frac{1}{\rho_\varepsilon^2}$ (voir n° 50):

$$(28'') \qquad \frac{\sin^2\Phi}{\rho_\varepsilon^2} = \omega_Z^2\sin^2\varphi' + \omega_Z'^2\sin^2\varphi + 2\,\omega_Z\,\omega_Z'\sin\varphi\sin\varphi'\cos V'',$$

avec cette remarque, particulière à V'', savoir : que l'on a

$$(e) \qquad \omega_Z\,\omega_Z'\cos V''\sin\Phi = \mathrm{p}_1\,\mathrm{p}' + \mathrm{q}_1\,\mathrm{q}' = \mathrm{p}\,\mathrm{p}_1' + \mathrm{q}\,\mathrm{q}_1',$$

$$(e') \qquad \omega_Z\,\omega_Z'\sin V''\sin\Phi = \mathrm{p}\,\mathrm{q}' - \mathrm{q}\,\mathrm{p}' = \mathrm{p}_1\,\mathrm{q}_1' - \mathrm{q}_1\,\mathrm{p}_1' = \mathrm{K}''.$$

Il est facile de dégager les courbures de front qui entrent dans les formules (29) ci-dessus. Il suffit pour cela de remonter à la valeur (24) de $\frac{1}{\rho_0}$ ou $\frac{1}{\rho_{0,S}}$:

$$\frac{\sin\Phi}{\rho_0} = (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\cos\varphi + (q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\cos\varphi',$$

et d'y introduire, l'une après l'autre, les hypothèses faites plus haut. On trouve ainsi (14)

$$(30) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{0,s}} &= p + q\cos\Phi = \mathrm{p} = p_1\sin\Phi, \\ \frac{1}{\rho_{0,s'}} &= q' + p'\cos\Phi = \mathrm{q}' = q_1'\sin\Phi; \end{aligned}\right.$$

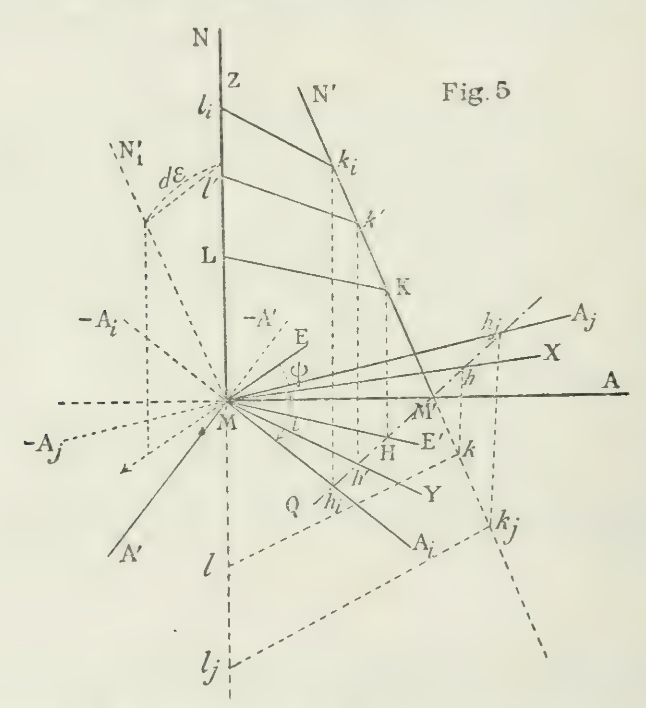
et l'on vérifie aisément que l'on a bien

$$\frac{1}{\rho^2_{\varepsilon,s}} = \frac{1}{\rho^2_{0,s}} + \frac{1}{R^2_Z} = \mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2_1,$$

$$\frac{1}{\rho^2_{\varepsilon,s'}} = \frac{1}{R'^2_Z} + \frac{1}{\rho^2_{0,s'}} = \mathrm{p}'^2_1 + \mathrm{q}'^2.$$

Cherchons une troisième expression générale de $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$, laquelle ne nous offrira pas moins d'avantages, dans la suite, que les premières.

A cet effet, observons d'abord que la projection $M'Q$ (Fig. 5) de la pseudo-normale $M'N'$ (n° 1) sur le plan horizontal est une droite parallèle à ME. Abaissons sur elle la perpendiculaire ME', et soit H leur point de rencontre. MH sera alors la projection de la plus courte distance LK des deux droites MN et $M'N'$.



Soient k, k' les traces de $M'N'$ sur les plans normaux NMX, NMY. Désignons par h, h' les projections de ces traces sur le plan horizontal et posons $kh = \zeta_1$, $k'h' = \zeta'_1$. Des triangles Mkh et $M'Mh$, on tire (n° 14)

$$\pm M'h = \zeta_1 \, d\varepsilon = \zeta_1 \frac{dS}{\rho_\varepsilon} = \frac{dS \sin\varphi}{\sin(\psi - \varphi)},$$

et, par suite,

$$\frac{\sin(\psi - \varphi)}{\rho_\varepsilon} = \frac{\sin\varphi}{\zeta_1}.$$

On obtiendrait de même

$$\frac{\sin(\psi + \varphi')}{\rho_\varepsilon} = -\frac{\sin\varphi'}{\zeta'_1},$$

ζ_1 étant ici implicitement négatif et ζ'_1 positif.

Cela posé, les formules (27) nous donnent

$$\frac{\sin(\psi - \varphi)}{\rho_\varepsilon} = \frac{\sin\varphi}{\rho''} + \frac{\cos\varphi}{\rho_0} = \frac{\sin\varphi}{\zeta_1},$$

$$\frac{\sin(\psi + \varphi')}{\rho_\varepsilon} = -\frac{\sin\varphi'}{\rho''} + \frac{\cos\varphi'}{\rho_0} = -\frac{\sin\varphi'}{\zeta'_1},$$

puis, d'après (22″) et (21′),

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{\zeta_1} &= \frac{1}{\sin\Phi}(P_1 + Q_1\cos\Phi) = P = p_1\sin\varphi' + p'_1\sin\varphi, \\ -\frac{\sin\varphi'}{\zeta'_1} &= \frac{1}{\sin\Phi}(Q_1 + P_1\cos\Phi) = Q = q_1\sin\varphi' + q'_1\sin\varphi. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, la troisième des formules (22) pouvant s'écrire

$$\alpha_\varepsilon\frac{\sin\Phi}{\rho_\varepsilon} = aQ - a'P,$$

revient à

$$-\alpha_\varepsilon\frac{\sin\Phi}{\rho_\varepsilon} = a\frac{\sin\varphi'}{\zeta'_1} + a'\frac{\sin\varphi}{\zeta_1}.$$

On en tire immédiatement l'expression cherchée, savoir :

$$(28''')\qquad \frac{\sin^2\Phi}{\rho_\varepsilon^2} = \frac{\sin^2\varphi}{\zeta_1^2} + \frac{\sin^2\varphi'}{\zeta_1'^2} + 2\frac{\sin\varphi}{\zeta_1}\frac{\sin\varphi'}{\zeta'_1}\cos\Phi.$$

Comme vérification, on a aussi, (21) et (31) :

$$\frac{\sin^2\Phi}{\rho_\varepsilon^2} = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\Phi = \Omega_Z^2\sin^2\Phi;$$

ce qui concorde pleinement avec l'expression (28), et nous fournit, par surcroit, la formule *mixte* suivante :

$$\frac{\sin\Phi}{\rho_\varepsilon^2} = PP_1 + QQ_1 = \Omega_Z^2\sin\Phi.$$

III.

Des composantes générales de la déviation verticale.

16. Soit MA_i une semi-droite menée par le point M dans le plan horizontal et faisant, dans le sens direct, avec MA un angle quelconque i, consécutif de ψ; le système (27) nous donne

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{\cos(\psi+i)}{\rho_\varepsilon} &= \frac{\cos i}{\rho''} + \frac{\sin i}{\rho_0} \\ &= \frac{1}{\sin\Phi}[P_1 \sin(\varphi+i) - Q_1 \sin(\varphi'-i)]. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant on remplace dans cette formule i par $i - \frac{\pi}{2}$, ce qui revient à considérer une seconde droite MA_j telle que MA_i soit élevée par rapport à elle dans le sens direct, on trouve

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin(\psi+i)}{\rho_\varepsilon} &= -\frac{\sin i}{\rho''} + \frac{\cos i}{\rho_0} \\ &= \frac{1}{\sin\Phi}[P_1 \cos(\varphi+i) + Q_1 \cos(\varphi'-i)]. \end{aligned}\right.$$

On est ainsi conduit à poser

$$-\frac{\cos(\psi+i)}{\rho_\varepsilon} = \frac{1}{\rho_{\varepsilon,i}}, \qquad \frac{\sin(\psi+i)}{\rho_\varepsilon} = \frac{1}{\rho_{\varepsilon,j}},$$

puisqu'il est évident que ces quantités ne sont autres que les projections positives ou négatives (selon la valeur qu'on donne à i) de $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$, soit sur MA_i, soit sur MA_j. Pour abréger, nous les représenterons simplement par $\frac{1}{\rho_i}$, $\frac{1}{\rho_j}$.

Leur variation est facile à suivre ; car si, parmi les valeurs que l'on peut attribuer à l'*obliquité* i, on choisit les suivantes :

$$-\frac{\pi}{2}, \qquad -\psi, \qquad 0, \qquad \frac{\pi}{2}-\psi, \qquad \frac{\pi}{2},$$

qui correspondent aux directions $-MA'$, ME, MA, ME', MA', les projections de $\frac{1}{\rho_i}$, $\frac{1}{\rho_j}$ prendront les valeurs simultanées :

$$\frac{1}{\rho_0}, \quad \frac{1}{\rho_\varepsilon}, \quad -\frac{1}{\rho''}, \quad 0, \quad -\frac{1}{\rho_0},$$
$$\frac{1}{\rho''}, \quad 0, \quad \frac{1}{\rho_0}, \quad \frac{1}{\rho_\varepsilon}, \quad -\frac{1}{\rho''}.$$

17. Propriétés de ces composantes. — 1° Si l'on développe la formule (32) après y avoir exprimé les cosinus en fonction des sinus, il viendra

$$(32') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin^2\Phi}{\rho_i} &= (\mathrm{p}\sin i - \mathrm{q}_1\cos i)\sin^2\varphi' \\ &+ [(\mathrm{q}+\mathrm{p}')\sin i + (\mathrm{p}_1 - \mathrm{q}_1')\cos i]\sin\varphi\sin\varphi' \\ &+ (\mathrm{q}'\sin i + \mathrm{p}_1'\cos i)\sin^2\varphi. \end{aligned} \right.$$

On en déduira $\frac{1}{\rho_j}$ en y changeant i en $i - \frac{\pi}{2}$, ce qui donnera une expression de même forme. Étant, toutes les deux, *homogènes* en $\sin\varphi'$, $\sin\varphi$, $\sin\Phi$, on pourra, au besoin, y remplacer les sinus par les arcs proportionnels ds, ds', dS.

2° Menons les plans normaux NMA_i, NMA_j. Soient k_i, k_j les traces de la pseudo-normale $M'N'$ sur ces plans et h_i, h_j les projections horizontales de ces traces. On obtiendra, ou par la considération de nouveaux triangles, ou bien en posant simplement dans les valeurs trouvées au n° 15 : $\varphi = \frac{\pi}{2} - i$ et $\varphi' = i$, les formules suivantes :

$$(32'') \qquad -\frac{\cos(\psi + i)}{\rho_\varepsilon} = \frac{\cos i}{\zeta_j} = \frac{1}{\rho_i},$$

$$(33'') \qquad \frac{\sin(\psi + i)}{\rho_\varepsilon} = -\frac{\sin i}{\zeta_i} = \frac{1}{\rho_j},$$

dans lesquelles ζ_i et ζ_j sont les deux ordonnées k_ih_i et k_jh_j construites dans les mêmes conditions que ζ_1' et ζ_1.

3° Du système (31), on tire

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} -Q\sin\Phi &= \frac{\sin\varphi'}{\zeta_1'} + \frac{\sin\varphi}{\zeta_1}\cos\Phi, \\ P\sin\Phi &= \frac{\sin\varphi}{\zeta_1} + \frac{\sin\varphi'}{\zeta_1'}\cos\Phi. \end{aligned} \right.$$

Or si l'on substitue ces expressions dans la formule (27), on trouve

$$(32''') \qquad \frac{\cos i}{\zeta_j}\sin\Phi = \frac{\sin\varphi}{\zeta_1}\cos(\varphi' - i) + \frac{\sin\varphi'}{\zeta'_1}\cos(\varphi + i),$$

$$(33''') \quad -\frac{\sin i}{\zeta_i}\sin\Phi = \frac{\sin\varphi}{\zeta_1}\sin(\varphi' - i) - \frac{\sin\varphi'}{\zeta'_1}\sin(\varphi + i);$$

ce qui exprime $\frac{1}{\zeta_i}$, $\frac{1}{\zeta_j}$ *linéairement* en $\frac{1}{\zeta_1}$, $\frac{1}{\zeta'_1}$.

IV.

Secondes courbures ou flexions d'une ligne quelconque tracée sur une pseudo-surface.

(Méthode géométrique).

18. Soient $MABB'$, $MA'CC'$, $MNEE'$ les trièdres trirectangles relatifs aux trois déviations (n° 13). Afin d'obtenir des résultats plus symétriques, nous supposerons que, dans le second, la disposition des arêtes est *inverse,* ainsi que la Fig. 4 l'indique d'ailleurs.

Désignons par $(\alpha'_\sigma, \beta'_\sigma, \gamma'_\sigma)$, $(\alpha'_\upsilon, \beta'_\upsilon, \gamma'_\upsilon)$, $(\alpha'_\varepsilon, \beta'_\varepsilon, \gamma'_\varepsilon)$ les cosinus directeurs des trois arêtes MB', MC', ME' de ces trièdres. D'après ce qui a été vu au n° 14, nous pouvons écrire

$$(35) \qquad \begin{cases} \cos(N, B') = a''\alpha'_\sigma + b''\beta'_\sigma + c''\gamma'_\sigma = \sin\varpi, \\ \cos(N, C') = a''\alpha'_\upsilon + b''\beta'_\upsilon + c''\gamma'_\upsilon = \sin\chi, \\ \cos(A, E') = \alpha\alpha'_\varepsilon + \beta\beta'_\varepsilon + \gamma\gamma'_\varepsilon = \sin\psi, \end{cases}$$

avec les relations subséquentes que nous fournit la théorie ordinaire des courbes gauches (laquelle, on le sait, n'implique en rien celle des surfaces), relations qu'on peut obtenir, du reste, directement, en projetant sur les axes coordonnés divers triangles isocèles infinitésimaux (n° 5) dont la base est la corde de l'arc qui mesure l'angle de contingence correspondant, savoir :

$$\begin{aligned} d\alpha &= \alpha_\sigma d\sigma, & d\alpha'_\sigma &= \alpha_\sigma d\tau_\sigma, \\ d\alpha' &= \alpha_\upsilon d\upsilon, & d\alpha'_\upsilon &= \alpha_\upsilon d\tau_\upsilon, \\ da'' &= \alpha_\varepsilon d\varepsilon, & d\alpha'_\varepsilon &= \alpha_\varepsilon d\tau_\varepsilon. \end{aligned}$$

Nous avons représenté dans ce tableau par $d\tau_\sigma$, $d\tau_\upsilon$, $d\tau_\varepsilon$ les angles de contingence relatifs aux variations des troisièmes arêtes des trièdres précédents.

D'autre part, la trigonométrie sphérique nous donne

$$\cos(E, B') = \cos\varpi \sin\psi,$$
$$\cos(E, C') = -\cos\chi \cos\psi,$$
$$\cos(B, E') = \sin\varpi \cos\psi.$$

Différentiant les formules (35), il vient

$$(36) \qquad \begin{cases} d\tau_\sigma = d\varpi - \sin\psi \, d\varepsilon, \\ d\tau_\upsilon = d\chi - \cos\varpi \, d\sigma, \\ d\tau_\varepsilon = d\psi - \sin\varpi \, d\sigma, \end{cases}$$

ou bien, en introduisant les rayons de seconde courbure :

$$(36') \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_\sigma} = \dfrac{d\varpi}{dS} - \dfrac{1}{\rho_0}, \\ \dfrac{1}{\tau_\upsilon} = \dfrac{d\chi}{dS} - \dfrac{1}{\rho''}, \\ \dfrac{1}{\tau_\varepsilon} = \dfrac{d\psi}{dS} - \dfrac{1}{\rho'}. \end{cases}$$

Nous donnerons à ces nouvelles courbures les noms respectifs de *flexions* 1° de front, 2° de profil, 3° de niveau, parce qu'elles sont situées, comme les courbures élémentaires correspondantes, dans les plans de même désinence.

Dans $\dfrac{1}{\tau_\sigma}$, on reconnait la *torsion* de la ligne (S). Sauf raison accidentelle de symétrie, nous la représenterons plus commodément par $\dfrac{1}{\tau}$.

V.

Expressions analytiques des trois flexions et de leurs composantes orthogonales.

19. 1° Flexion de front. — Nous commençons par cette seconde courbure parce que, à la manière de la déviation initiale, elle est *intrinsèque* à la ligne (S) et n'est pas, comme les deux autres, introduite par la pseudo-surface **F** sur laquelle elle se trouve située.

Soient donc $(\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma)$ et $(\alpha'_\sigma, \beta'_\sigma, \gamma'_\sigma)$ les cosinus directeurs de la normale principale MB et de l'axe MB' du plan osculateur de (S). D'après les formules préliminaires (6′) et (5′), on a, dans le plan nor-

mal NMA' :

$$\alpha'_\sigma = -\alpha' \cos \varpi + a'' \sin \varpi,$$

$$\alpha_\sigma = \alpha' \sin \varpi + a'' \cos \varpi,$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha'_\sigma}{\rho} = \frac{a}{\rho''} \frac{\cos \varphi'}{\sin \Phi} - \frac{a'}{\rho''} \frac{\cos \varphi}{\sin \Phi} + \frac{a''}{\rho'},$$

$$\frac{\tau}{\rho} \frac{d\alpha'_\sigma}{dS} = \frac{\alpha_\sigma}{\rho} = -\frac{a}{\rho'} \frac{\cos \varphi'}{\sin \Phi} + \frac{a'}{\rho'} \frac{\cos \varphi}{\sin \Phi} + \frac{a''}{\rho''}.$$

Différentiant la première, nous connaitrons deux valeurs distinctes de $\frac{1}{\rho} \frac{d\alpha'_\sigma}{dS}$. Égalant entr'eux les coefficients de a'', la question se trouve résolue; car cette condition d'égalité revient à

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\rho''}{\rho'} \frac{d}{dS} \left(\frac{\rho}{\rho'} \right) - \frac{1}{\sin \Phi} (P_1 \cos \varphi + Q_1 \cos \varphi').$$

Ajoutons que si, après avoir formé pour les coefficients a et a' deux expressions analogues, on multipliait la première par $\sin \varphi$, la seconde, par $\sin \varphi'$ et qu'on les ajoutât, on trouverait comme seconde expression de l'inconnue $\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{\rho'}{\rho} \frac{d}{dS} \left(\frac{\rho}{\rho''} \right) - \frac{1}{\sin \Phi} (P_1 \cos \varphi + Q_1 \cos \varphi').$$

On constate l'identité de ces deux valeurs en différentiant les relations

$$\rho = \rho' \sin \varpi = \rho'' \cos \varpi,$$

ce qui mène à cette troisième forme que nous avions surtout en vue :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\varpi}{dS} - \frac{1}{\sin \Phi} (P_1 \cos \varphi + Q_1 \cos \varphi'),$$

ou enfin (24)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\varpi}{dS} - \frac{1}{\rho_0}.$$

Il importe de remarquer ici que les rayons de torsion τ et de déviation initiale ρ coïncident, en direction, suivant MB puisqu'on a

$$\alpha_\sigma = \rho \frac{d\alpha}{dS} = \cos(\rho, x),$$

. . . .

$$\alpha_\sigma = \tau \frac{d\alpha'_\sigma}{dS} = \cos(\tau, x),$$

. . . .

On en conclut ces relations parfois utiles entre leurs composantes

de même nom (n° 21) :

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{\rho'}{\tau'} = \frac{\rho''}{\tau''} .$$

2° Flexion de profil.—Les cosinus directeurs de MC et MC' étant respectivement $(\alpha_\upsilon, \beta_\upsilon, \gamma_\upsilon)$ et $(\alpha'_\upsilon, \beta'_\upsilon, \gamma'_\upsilon)$, nos formules appliquées à ces directions, dans le plan NMA, nous donnent

$$\alpha'_\upsilon = -\alpha \cos\chi + a'' \sin\chi,$$

$$\alpha_\upsilon = \alpha \sin\chi + a'' \cos\chi,$$

et, par suite (25), on a

$$-\frac{\alpha'_\upsilon}{\rho_\upsilon} = \frac{a}{\rho_0}\frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi} + \frac{a'}{\rho_0}\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi} + \frac{a''}{\rho'},$$

$$\frac{\tau_\upsilon}{\rho_\upsilon}\frac{d\alpha'_\upsilon}{dS} = \frac{\alpha_\upsilon}{\rho_\upsilon} = -\frac{a}{\rho'}\frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi} - \frac{a'}{\rho'}\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi} + \frac{a''}{\rho_0}.$$

Différentiant la première et égalant entr'eux, ici encore, les coefficients de a'' dans les deux expressions de $\frac{1}{\rho_\upsilon}\frac{d\alpha'_\upsilon}{dS}$, on trouve immédiatement

$$\frac{1}{\tau_\upsilon} = -\frac{\rho_0}{\rho_\upsilon}\frac{d}{dS}\left(\frac{\rho_\upsilon}{\rho'}\right) - \frac{1}{\sin\Phi}(P_1 \sin\varphi - Q_1 \sin\varphi').$$

Une combinaison convenable des conditions relatives à a et a' donnerait

$$\frac{1}{\tau'_\upsilon} = \frac{\rho'}{\rho_\upsilon}\frac{d}{dS}\left(\frac{\rho_\upsilon}{\rho_0}\right) - \frac{1}{\sin\Phi}(P_1 \sin\varphi - Q_1 \sin\varphi');$$

et comme on a

$$\rho_\upsilon = \rho_0 \cos\chi = -\rho' \sin\chi,$$

on en conclut

$$\frac{1}{\tau_\upsilon} = \frac{d\chi}{dS} - \frac{1}{\sin\Phi}(P_1 \sin\varphi - Q_1 \sin\varphi'),$$

ou enfin

$$\frac{1}{\tau_\upsilon} = \frac{d\chi}{dS} - \frac{1}{\rho''},$$

comme précédemment (36').

Quant aux composantes suivant MN et $-MA$, la coïncidence, en direction, des rayons ρ_υ et τ_υ, suivant MC, permet d'écrire

$$\frac{\rho_\upsilon}{\tau_\upsilon} = \frac{\rho''_\upsilon}{\tau''_\upsilon} = \frac{\rho'''_\upsilon}{\tau'''_\upsilon},$$

avec $\rho''_\upsilon = \rho_0$ et $\rho'''_\upsilon = -\rho'$.

3° Flexion de niveau. — Il nous faut partir ici des cosinus directeurs $(\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon, \gamma_\varepsilon)$ de ME et $(\alpha'_\varepsilon, \beta'_\varepsilon, \gamma'_\varepsilon)$ de ME'. Or on a

$$\alpha'_\varepsilon = \alpha' \cos\psi + \alpha \sin\psi,$$
$$\alpha_\varepsilon = -\alpha' \sin\psi + \alpha \cos\psi,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\alpha'_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = \frac{a}{\rho''}\frac{\cos\varphi'}{\sin\Phi} - \frac{a'}{\rho''}\frac{\cos\varphi}{\sin\Phi} + \frac{\alpha}{\rho_0},$$

$$\frac{\tau_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\frac{d\alpha'_\varepsilon}{dS} = \frac{\alpha_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = \frac{a}{\rho_0}\frac{\cos\varphi'}{\sin\Phi} - \frac{a'}{\rho_0}\frac{\cos\varphi}{\sin\Phi} - \frac{\alpha}{\rho''}.$$

Si l'on différentie la première et qu'on égale les coefficients dè a'', on retombe simplement sur la valeur connue de $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$. Il devient donc nécessaire, et non plus facultatif, comme dans les deux premiers cas, de combiner entr'elles les conditions que l'on obtient en égalant deux-à-deux les coefficients, soit de a, soit de a'. On trouvera ainsi

$$(37)\quad \frac{1}{\tau_\varepsilon} = \frac{\rho_\varepsilon^2}{\sin^3\Phi}\left[\begin{array}{c}(PP_1 - K''\sin\varphi'\cos\varphi)\dfrac{d\varphi}{dS} \\ -(QQ_1 - K''\sin\varphi\cos\varphi')\dfrac{d\varphi'}{dS}\end{array}\right] - \left(R_1 + \frac{d\varphi}{dS}\right);$$

d'où l'on voit que, pour que la concordance de nos formules soit manifeste, il nous reste à montrer que cette dernière équivaut à

$$\frac{1}{\tau_\varepsilon} = \frac{d\psi}{dS} - \frac{1}{\rho'}.$$

A cet effet, remarquons d'abord qu'en désignant par ω et ω' les angles que fait ME' avec les axes coordonnés, on a, dans les conditions de figure où nous nous sommes placés (n° 14) :

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{l}\omega = \varphi + \left(\dfrac{\pi}{2} - \psi\right), \\ \omega' = \varphi' - \left(\dfrac{\pi}{2} - \psi\right);\end{array}\right.$$

d'où l'on tire

$$(38')\quad \left\{\begin{array}{l}d\omega = d\varphi - d\psi, \\ d\omega' = d\varphi' + d\psi;\end{array}\right.$$

double système dont chacun ne fournit plus qu'une équation lorsqu'on suppose les coordonnées rectangulaires.

D'autre part, pour ce même cas d'orthogonalité, l'équation (37) se

réduit (23) à

$$\frac{1}{\tau_\varepsilon} = [1 - \rho_\varepsilon^2(pq' - qp')]\frac{d\varphi}{dS} - \frac{1}{\rho'},$$

ρ_ε étant alors donné (28′) par la formule

$$\frac{1}{\rho_\varepsilon^2} = (p\cos\varphi + p'\sin\varphi)^2 + (q\cos\varphi + q'\sin\varphi)^2.$$

La question est donc ramenée à prouver que l'on a identiquement

$$\frac{d\psi}{aS} = [1 - \rho_\varepsilon^2(pq' - qp')]\frac{d\varphi}{dS},$$

ou, mieux encore,

$$d\omega = \rho_\varepsilon^2(pq' - qp')\,d\varphi.$$

Or, si l'on intègre cette expression, on trouve

(39) $$q - (p\,\mathrm{tg}\,\omega - q'\,\mathrm{tg}\,\varphi) - p'\,\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0.$$

Posant $\mathrm{tg}\,\varphi = \mu$ et $\mathrm{tg}\,\omega = \mu'$, il vient

(39′) $$\mu' = \frac{q + q'\mu}{p + p'\mu},$$

relation que nous reconnaitrons plus tard exister entre les directions *pseudo-conjuguées* MA et ME'. Elle exprime que ces deux semi-droites sont deux directions *homologues* dans deux faisceaux homographiques. La propriété des tangentes conjuguées dans les surfaces (Dupin) n'est qu'un cas particulier correspondant à l'hypothèse $p + q' = 0$.

Quant aux composantes orthogonales de $\frac{1}{\tau_\varepsilon}$, observons que, à cause des relations connues (25),

$$\rho_\varepsilon = \rho_0 \sin\psi = -\rho''\cos\psi,$$

on a d'abord

$$\frac{d\psi}{dS} = \frac{\rho_0}{\rho_\varepsilon}\frac{d}{dS}\left(\frac{\rho_\varepsilon}{\rho''}\right) = -\frac{\rho''}{\rho_\varepsilon}\frac{d}{dS}\left(\frac{\rho_\varepsilon}{\rho_0}\right),$$

puis, en vertu de la coïncidence, suivant ME, des rayons ρ_ε et τ_ε :

$$\frac{\rho_\varepsilon}{\tau_\varepsilon} = \frac{\rho_\varepsilon'}{\tau_\varepsilon'} = \frac{\rho_\varepsilon'''}{\tau_\varepsilon'''},$$

avec $\rho_\varepsilon' = \rho_0$ et $\rho_\varepsilon''' = -\rho''$.

Nota. — Comme application des questions traitées dans ce paragraphe, le lecteur prendra intérêt, croyons-nous, à parcourir, dans le Bulletin de la Société Mathématique de France (t. XXV, p. 243) notre article intitulé : *Sur une formule de* Laguerre, *étendue aux pseudo-surfaces.*

Cette formule est la suivante :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dS} - \operatorname{tg}\varpi\left(\frac{2}{\tau} - 3\frac{d\varpi}{dS}\right) = 2R_1\frac{\rho''}{\rho_0} = -2R_1\operatorname{tg}\psi.$$

VI.

Troisièmes courbures ou courbures rectifiantes.

20. Troisième courbure absolue. — Des relations usuelles

$$(40)\qquad \frac{d\alpha}{dS} = \frac{\alpha_\sigma}{\rho}, \qquad \frac{d\alpha'_\sigma}{dS} = \frac{\alpha_\sigma}{\tau},$$

prises conjointement avec

$$\alpha^2 + \alpha_\sigma^2 + \alpha_\sigma'^2 = 1,$$

on déduit par la différentiation

$$(40')\qquad \frac{d\alpha_\sigma}{dS} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\alpha'_\sigma}{\tau}.$$

La courbure que cette troisième formule définit est relative à la variation de la normale principale MB, c'est-à-dire à la direction commune des rayons ρ et τ. Comme on a manifestement

$$\sum\left(\frac{d\alpha_\sigma}{dS}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{\delta^2},$$

nous nommerons $\frac{1}{\delta}$ ou $\frac{1}{\delta_\sigma}$ (suivant le cas) la troisième courbure absolue de la ligne (S).

Soit MD (Fig. 4) la direction du rayon δ. Élevons sur le plan BMD la perpendiculaire MD', du côté de MN, nous obtiendrons la droite rectifiante (absolue) de la ligne (S) en M. Il s'agit d'évaluer les cosinus directeurs de MD et de MD'.

Pour cela, remarquons que le trièdre tri-rectangle $MBDD'$ est dans les mêmes conditions que le trièdre $MABB'$. Les formules (40) lui sont donc applicables. Or, de la première, on tire

$$\frac{d\alpha_\sigma}{dS} = \frac{\cos(D, x)}{\delta};$$

d'où l'on conclut, d'après (40′),

$$\frac{\cos(D, x)}{\delta} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\alpha'_\sigma}{\tau}.$$

Quant à MD', on a, pour déterminer $\cos(D', x)$, par exemple,

$$(f) \quad \begin{cases} \dfrac{\cos(D',\ x)}{\delta} = \beta_\sigma \dfrac{d\gamma_\sigma}{dS} - \gamma_\sigma \dfrac{d\beta_\sigma}{dS} \\ \qquad\qquad = -\left(\dfrac{\gamma_\sigma}{\rho} + \dfrac{\gamma'_\sigma}{\tau}\right)\beta_\sigma + \left(\dfrac{\beta_\sigma}{\rho} + \dfrac{\beta'_\sigma}{\tau}\right)\gamma_\sigma; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\cos(D',\ x)}{\delta} = \frac{\alpha'_\sigma}{\rho} - \frac{\alpha}{\tau}.$$

21. Propriétés. — On sait que les deux droites MD et MD' sont situées dans le plan *rectifiant*, c'est-à-dire dans le plan de la tangente MA et de l'axe MB' du plan osculateur. A cette propriété, nous adjoindrons celles que renferme le tableau suivant :

$$\cos(D,\ B') = -\frac{\delta}{\tau}, \qquad \cos(D',\ B') = \frac{\delta}{\rho},$$

$$\cos(D,\ A) = -\frac{\delta}{\rho}, \qquad \cos(D',\ A) = -\frac{\delta}{\tau},$$

$$\cos(D,\ N) = -\frac{\delta}{\tau'}, \qquad \cos(D',\ N) = \frac{\delta}{\rho'},$$

$$\cos(D,\ A') = \frac{\delta}{\tau''}, \qquad \cos(D',\ A') = -\frac{\delta}{\rho''},$$

$$\cos(D,\ C) = \frac{\delta\rho_\upsilon}{\rho\rho'} - \frac{\delta\rho_\upsilon}{\tau'\rho_0}, \qquad \cos(D',\ C) = \frac{\delta\rho_\upsilon}{\tau\rho'} + \frac{\delta\rho_\upsilon}{\rho'\rho_0},$$

$$\cos(D,\ C') = \frac{\delta\rho_\upsilon}{\rho\rho_0} + \frac{\delta\rho_\upsilon}{\tau'\rho'}, \qquad \cos(D',\ C') = \frac{\delta\rho_\upsilon}{\tau\rho_0} - \frac{\delta\rho_\upsilon}{\rho'^2},$$

$$\cos(D,\ E) = \frac{\delta\rho_\varepsilon}{\rho\rho''} - \frac{\delta\rho_\varepsilon}{\tau''\rho_0}, \qquad \cos(D',\ E) = \frac{\delta\rho_\varepsilon}{\tau\rho''} + \frac{\delta\rho_\varepsilon}{\rho''\rho_0},$$

$$\cos(D,\ E') = -\frac{\delta\rho_\varepsilon}{\rho\rho_0} - \frac{\delta\rho_\varepsilon}{\tau''\rho''}, \qquad \cos(D',\ E') = -\frac{\delta\rho_\varepsilon}{\tau\rho_0} + \frac{\delta\rho_\varepsilon}{\rho''^2}.$$

Ces valeurs sont indépendantes de tout système de coordonnées. On s'est aidé pour les calculer de ce que l'on a (n° 19) :

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{\rho'}{\tau'} = \frac{\rho''}{\tau''}.$$

Quant aux cosinus des angles que font MD et MD' avec les tangentes aux lignes coordonnées, c'est-à-dire avec MX et MY, on a

$$\cos(D,\ X) = -\frac{\delta}{\tau''}\sin\varphi - \frac{\delta}{\rho}\cos\varphi,$$
$$\cos(D,\ Y) = \frac{\delta}{\tau''}\sin\varphi' - \frac{\delta}{\rho}\cos\varphi',$$
$$\cos(D',\ X) = \frac{\delta}{\rho''}\sin\varphi - \frac{\delta}{\tau}\cos\varphi,$$
$$\cos(D',\ Y) = -\frac{\delta}{\rho''}\sin\varphi' - \frac{\delta}{\tau}\cos\varphi'.$$

22. Troisièmes courbures dérivées. — Considérons maintenant les courbures relatives à la variation de MC qui est la direction de $\frac{1}{\rho_\upsilon}$ et de $\frac{1}{\tau_\upsilon}$, et à celle de ME qui est la direction de $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$ et de $\frac{1}{\tau_\varepsilon}$. Nous avons

$$\sum\left(\frac{d\alpha_\upsilon}{dS}\right)^2 = \frac{1}{\rho_\upsilon^2} + \frac{1}{\tau_\upsilon^2} = \frac{1}{\delta_\upsilon^2},$$
$$\sum\left(\frac{d\alpha_\varepsilon}{dS}\right)^2 = \frac{1}{\rho_\varepsilon^2} + \frac{1}{\tau_\varepsilon^2} = \frac{1}{\delta_\varepsilon^2}.$$

Il y aurait donc lieu de construire deux nouveaux trièdres analogues au trièdre $MBDD'$ et dont la troisième arête serait, pour chacun, la droite rectifiante *dérivée* de ces nouvelles courbures.

On pourrait enfin dresser pour ces courbures rectifiantes *extrinsèques,* deux tableaux qui auraient de grandes analogies avec le précédent. Nous nous contenterons d'écrire les trois formules qui suivent et dont la composition suffira pour mettre hors de doute notre assertion :

$$\frac{1}{\delta_\sigma^2} = \left(\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2}\right) + \left(\frac{d\varpi}{dS} - \frac{1}{\rho_0}\right)^2,$$
$$\frac{1}{\delta_\upsilon^2} = \left(\frac{1}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho'^2}\right) + \left(\frac{d\chi}{dS} - \frac{1}{\rho''}\right)^2,$$
$$\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = \left(\frac{1}{\rho''^2} + \frac{1}{\rho_0^2}\right) + \left(\frac{d\psi}{dS} - \frac{1}{\rho'}\right)^2.$$

Que si maintenant on convient de porter ces trois courbures (intrinsèques ou extrinsèques) sur les arêtes d'un trièdre trirectangle quelconque, on aura pour la courbure *résultante* de la ligne (S), au point M,

$$\frac{1}{\Gamma^2} = \frac{1}{\delta_\sigma^2} + \frac{1}{\delta_\upsilon^2} + \frac{1}{\delta_\varepsilon^2}.$$

Elle sera donc parfaitement déterminée, en grandeur et en direction.

CHAPITRE III.

LIGNES REMARQUABLES DES PSEUDO-SURFACES ET DES SURFACES.

I.

Cas général où ces lignes appartiennent à une pseudo-surface.

23. I. — LIGNES GÉODÉSIQUES. — Nous appelons lignes géodésiques d'une pseudo-surface quelconque, tangente au plan des XY, celles pour lesquelles la première courbure horizontale ou de niveau $\frac{1}{\rho'}$ est nulle en chacun de leurs points. Or, d'après (33), on a

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\varphi}{dS} + R_1, \tag{41}$$

ou bien, en vertu de l'identité (20'),

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{d\varphi'}{dS} + N_1. \tag{42}$$

On en conclut (18') pour l'équation générale des lignes géodésiques :

$$d\varphi + r\,ds + r'\,ds' = 0, \tag{41'}$$

ou

$$d\varphi' - n\,ds - n'\,ds' = 0. \tag{42'}$$

Comme vérification, on tire de ce système l'identité

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial s}ds + \frac{\partial\Phi}{\partial s'}ds';$$

il suffit pour cela de remarquer que les relations (10) reviennent à

$$\left\{\begin{aligned} n &= r + \frac{\partial\Phi}{\partial s}, \\ n' &= r' + \frac{\partial\Phi}{\partial s'}. \end{aligned}\right. \tag{43}$$

NOTA. — Pour l'étude détaillée de ces lignes nous renvoyons le lecteur à notre Mémoire inséré dans les Nouvelles Annales (1901, p. 53) sous ce titre : *Étude sur les pseudo-surfaces,* etc.

24. II. — LIGNES ASYMPTOTIQUES. — Les lignes asymptotiques d'une pseudo-surface sont celles pour lesquelles la première courbure verticale ou de profil, $\frac{1}{\rho''}$, est nulle en chacun de leurs points.

D'après (23), on a

$$\frac{\sin \Phi}{\rho''} = P_1 \sin \varphi - Q_1 \sin \varphi'.$$

L'équation de ces lignes est donc

$$(44) \qquad P_1 \sin \varphi - Q_1 \sin \varphi' = 0.$$

Développant, il vient

$$(44') \qquad q_1 ds^2 - (p_1 - q_1') ds\, ds' - p_1 ds'^2 = 0,$$

ou encore

$$(44'') \qquad q\, ds^2 - (p - q') ds\, ds' - p' ds'^2 = 0.$$

Une propriété caractéristique des lignes asymptotiques est de faire un angle droit avec leur représentation sphérique. En effet pour une courbe quelconque, cet angle n'est autre que celui des deux éléments horizontaux dS et $d\varepsilon$, c'est-à-dire l'angle EMA que nous avons représenté par ψ. Or, on a vu (25) que

$$\frac{1}{\rho''} = -\frac{\cos \psi}{\rho_\varepsilon}.$$

Comme, dans cette formule, $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$ n'est jamais nul tant qu'il s'agit d'une courbe proprement dite, on a $\frac{1}{\rho''} = 0$, pour $\psi = \frac{\pi}{2}$ et *vice-versa* ; donc, etc.

On arrive à la même conclusion en posant directement

$$\frac{da''}{\alpha'} = \frac{db''}{\beta'} = \frac{dc''}{\gamma'};$$

et exprimant que ces rapports sont indépendants de a_1 et a_1'. On trouve ainsi, à l'aide de la troisième des relations (a'') du n° 12,

$$\frac{P_1}{\sin \varphi'} = \frac{Q_1}{\sin \varphi};$$

d'où, la forme à établir (44).

25. Avant de passer aux lignes de courbure, nous allons donner, sous forme de déterminants, les valeurs des composantes p_1, p'_1, q_1, q'_1, qui entrent dans l'équation de ces dernières lignes aussi bien que dans celle des précédentes.

A cet effet, observons d'abord que si l'on écrit l, l', ... à la place de $\cos(R, x)$, $\cos(R', x)$ ... on aura (n° 6) :

$$\frac{1}{R_Z} = \frac{1}{R}(l a'' + m b'' + n c''),$$

$$\frac{1}{R'_Z} = \frac{1}{R'}(l' a'' + m' b'' + n' c'').$$

Remplaçant a'', b'', c'' par leur valeur en fonction de a, b, c, a', b', c', la première de ces relations peut se mettre sous la forme suivante, dans laquelle $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial s'}$ désignent SYMBOLIQUEMENT ici des fonctions arbitraires de s et s', qu'on suppose, par conséquent, *données* [et nullement déduites des coordonnées correspondantes x, y, z, non exprimables, par hypothèse, à l'aide d'équations finies (Voir : *Étude sur les pseudo-surfaces*, n° 2)] :

$$\frac{\sin\Phi}{R_Z} = \begin{vmatrix} \frac{l}{R} & a & a' \\ \frac{m}{R} & b & b' \\ \frac{n}{R} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial s'} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s'} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s'} \end{vmatrix} = \mathbf{D}.$$

On trouvera de même pour $\frac{\sin\Phi}{R'_Z}$ un nouveau déterminant $\mathbf{D}'$, qui ne différera du précédent qu'en ce que les éléments de la première colonne y seront remplacés par $\frac{\partial^2 x}{\partial s'^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial s'^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial s'^2}$.

En troisième lieu, si l'on fait, par analogie, $\lambda = \cos(M, x)$, $\lambda' = \cos(N', x)$ ..., il viendra

$$\frac{1}{M_Z} = \frac{1}{M}(\lambda a'' + \mu b'' + \nu c''),$$

$$\frac{1}{N'_Z} = \frac{1}{N'}(\lambda' a'' + \mu' b'' + \nu' c''),$$

et, par suite,

$$\frac{\sin\Phi}{M_Z} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{M} & a & a' \\ \frac{\mu}{M} & b & b' \\ \frac{\nu}{M} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial s'} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial s'} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial s'} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s'} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial s'} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s'} \end{vmatrix} = \mathbf{D}''.$$

Le rapport $\frac{\sin\Phi}{N'_Z}$ s'exprimera enfin par un quatrième déterminant $\mathbf{D}''_1$, ne différant de ce dernier que par la permutation des arcs dans la première colonne.

Nous ferons observer à ce propos que, pour que l'ordre des différentiations fut arbitraire, il faudrait que x, y, z redevinssent des fonctions finies et continues des variables s et s'. Mais nous aurons à nous occuper de ce cas dans le paragraphe suivant. Bornons-nous à insister ici sur ce fait que, ce qui caractérise nos déterminants actuels c'est que, si les dérivées secondes qui y entrent sont de *vraies* dérivées, déduites de $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial s'}$, ... par les règles ordinaires du calcul, celles-ci n'en sont pas, mais désignent *conventionnellement*, redisons-le, des fonctions de s et s' *données*.

Ces remarques faites, il résulte des notations introduites au n° 7 que, pour toute pseudo-surface **F**, tangente en M au plan des XY, on a les relations suivantes :

$$(45) \qquad \frac{-q_1}{\mathbf{D}} = \frac{p'_1}{\mathbf{D}'} = \frac{p_1}{\mathbf{D}''} = \frac{-q'_1}{\mathbf{D}''_1} = \frac{1}{\sin\Phi},$$

ou bien

$$(45') \qquad \frac{-q}{\mathbf{D}} = \frac{p'}{\mathbf{D}'} = \frac{p}{\mathbf{D}''} = \frac{-q'}{\mathbf{D}''_1} = \frac{1}{\sin^2\Phi}.$$

On en conclut cette nouvelle forme de l'équation des lignes asymptotiques :

$$(44''') \qquad \mathbf{D}\,ds^2 + (\mathbf{D}'' + \mathbf{D}''_1)\,ds\,ds' + \mathbf{D}'\,ds'^2 = 0.$$

26. III. — LIGNES DE COURBURE. — Par lignes de courbure d'une pseudo-surface quelconque, il faut entendre celles dont la première courbure de front $\frac{1}{\rho_0}$ est nulle en chacun de leurs points.

D'après (24), on a

$$\frac{\sin\Phi}{\rho_0} = P_1 \cos\varphi + Q_1 \cos\varphi'.$$

L'équation de ces lignes est donc

$$(46) \qquad P_1 \cos\varphi + Q_1 \cos\varphi' = 0\,.$$

Mais on sait que

$$\left\{\begin{array}{l} dS\cos\varphi = ds + ds'\cos\Phi, \\ dS\cos\varphi' = ds' + ds\cos\Phi. \end{array}\right.$$

Substituant, on trouve

$$(46') \quad \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{p}_1 + \mathrm{q}_1 \cos\Phi)\,ds^2 \\ \qquad + [(\mathrm{q}_1 + \mathrm{p}_1\cos\Phi) + (\mathrm{p}'_1 + \mathrm{q}'_1\cos\Phi)]\,ds\,ds' \\ \qquad\qquad + (\mathrm{q}'_1 + \mathrm{p}'_1\cos\Phi)\,ds'^2 = 0. \end{array}\right.$$

Cette seconde forme est celle qui se prête le mieux à l'introduction des déterminants définis par les proportions (45). Elle revient en effet à

$$(46'') \quad \left\{\begin{array}{l} (\mathbf{D}'' - \mathbf{D}\cos\Phi)\,ds^2 \\ \qquad - [(\mathbf{D} - \mathbf{D}''\cos\Phi) - (\mathbf{D}' - \mathbf{D}''_1\cos\Phi)]\,ds\,ds' \\ \qquad\qquad - (\mathbf{D}''_1 - \mathbf{D}'\cos\Phi)\,ds'^2 = 0. \end{array}\right.$$

Il est essentiel d'observer ici que la courbure de front pouvant aussi s'écrire

$$\frac{\sin^2\Phi}{\rho_0} = \mathrm{p}\sin^2\varphi' + (\mathrm{q} + \mathrm{p}')\sin\varphi\sin\varphi' + \mathrm{q}'\sin^2\varphi,$$

les lignes de courbure admettent, par là-même, la forme correspondante

$$(46''') \qquad \mathrm{p}\,ds^2 + (\mathrm{q} + \mathrm{p}')\,ds\,ds' + \mathrm{q}'\,ds'^2 = 0,$$

et, conséquemment, cette autre

$$(46^{\mathrm{IV}}) \qquad p_1\,ds^2 + (q_1 + p'_1)\,ds\,ds' + q'_1\,ds'^2 = 0,$$

les nouveaux coefficients pouvant d'ailleurs, comme les anciens, être représentés par des déterminants dont la formation serait aisée.

Voici une manière directe d'obtenir l'équation (46''').—On observe d'abord que les formules (31) transformées à l'aide de (21) et où l'on aura fait $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{ds'}{ds} = \mu$, reviennent à

$$\frac{\sin\Phi}{\zeta} = \frac{\mathrm{p}}{\mu} + \mathrm{p}',$$

$$\frac{\sin\Phi}{\zeta'} = -(\mathrm{q} + \mathrm{q}'\mu).$$

Or, si l'on égale entr'eux les seconds membres, on retombe, eu égard à la valeur de μ, sur l'équation (46''').

Une des propriétés caractéristiques des lignes de courbure est d'avoir leur élément linéaire dS parallèle à celui de leur représentation sphérique. C'est ce qu'il est facile de déduire, à la manière des lignes asymptotiques, soit de la valeur (25), savoir :

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{\sin\psi}{\rho_\varepsilon},$$

soit de la suite de rapports égaux :

$$\frac{da''}{\alpha} = \frac{db''}{\beta} = \frac{dc''}{\gamma}.$$

Ce second procédé, notamment, ramène à l'équation primordiale

$$P_1 \cos\varphi + Q_1 \cos\varphi' = 0.$$

Parmi beaucoup d'autres propriétés importantes dont jouissent les lignes de courbure, nous nous contenterons, dans cette première étude, de signaler ces deux-ci :

α. Les lignes de courbure d'une pseudo-surface sont *obliques* entr'elles. En effet, l'équation (46') étant de la forme

$$A + Bm^2 + Cm^2 = 0,$$

la condition de perpendicularité de ces lignes

$$A + C - B\cos\Phi = 0,$$

ou bien $p_1 + q'_1 = 0$ n'est pas remplie.

β. Lorsqu'on a $K'' = 0$, c'est-à-dire : $p_1 q'_1 - q_1 p'_1 = 0$ (n° 10), l'équation (46''') se décompose en deux facteurs réels du premier degré, savoir

$$p'ds + q'ds' = 0,$$
$$q\,ds + q'ds' = 0,$$

ou, équivalemment,

$$p\,ds + q\,ds' = 0,$$
$$p\,ds + p'ds' = 0.$$

27. IV. — Lignes pseudo-conjuguées, d'obliquité constante. — Leurs complémentaires.

1° Pour obtenir ces nouvelles lignes, que nous désignerons commodément par (S_i) et (S_j), il suffit d'égaler à zéro les composantes $\frac{1}{\rho_i}$ et

$\frac{1}{\rho_j}$ de la déviation verticale (n° 16). On a ainsi les équations :

$$(47)\qquad P_1 \sin(\varphi + i) - Q_1 \sin(\varphi' - i) = 0,$$

$$(48)\qquad P_1 \cos(\varphi + i) + Q_1 \cos(\varphi' - i) = 0,$$

dont la seconde peut se déduire de la première en y changeant i en $i \pm \frac{\pi}{2}$.

D'après (32'), l'équation (47) développée devient

$$(47')\quad \begin{cases} (\mathrm{p} \sin i - \mathrm{q}_1 \cos i)\, ds^2 \\ \qquad + [(\mathrm{q} + \mathrm{p}') \sin i + (\mathrm{p}_1 - \mathrm{q}'_1) \cos i]\, ds\, ds' \\ \qquad\qquad + (\mathrm{q}' \sin i + \mathrm{p}'_1 \cos i)\, ds'^2 = 0, \end{cases}$$

ou encore,

$$(47'')\quad \begin{cases} (p_1 \sin i - q \cos i)\, ds^2 \\ \qquad + [(q_1 + p'_1) \sin i + (p - q') \cos i]\, ds\, ds' \\ \qquad\qquad + (q'_1 \sin i + p' \cos i)\, ds'^2 = 0. \end{cases}$$

Cherchons quelle est la propriété caractéristique des lignes (S_i) et (S_j) vis-à-vis de l'élément linéaire correspondant de leur image sphérique.

Pour cela, reportons-nous à la figure (5) et formons, au moyen des relations (5) et (6), l'expression des cosinus (a_i, b_i, c_i) de A_i et (a_j, b_j, c_j) de A_j. On trouve, pour le cas le plus général :

$$a_i \sin \Phi = a_1 \cos(\varphi + i) + a'_1 \cos(\varphi' - i),$$

$$a_j \sin \Phi = a_1 \sin(\varphi + i) - a'_1 \sin(\varphi' - i),$$

. . . .

Cela étant, posons

$$\frac{da''}{a_i} = \frac{db''}{b_i} = \frac{dc''}{c_i}$$

et procédons comme dans les cas-limites ci-dessus ; il viendra

$$P_1 \cos(\varphi + i) + Q_1 \cos(\varphi' - i) = 0,$$

c'est-à-dire $\frac{1}{\rho_j} = 0$.

De même si l'on pose

$$\frac{da''}{a_j} = \frac{db''}{b_j} = \frac{dc''}{c_j},$$

et qu'on opère de la même façon, on trouvera

$$P_1 \sin(\varphi + i) - Q_1 \sin(\varphi' - i) = 0,$$

c'est-à-dire $\frac{1}{\rho_i} = 0$.

Ainsi quand MA coïncide avec la tangente à la ligne (S_i), l'arc élémentaire de la représentation sphérique de cette ligne se projette suivant MA_j devenu ME, en vertu de la condition $i = \frac{\pi}{2} - \psi$ ou $i = \frac{\pi}{2} - j$ .... Que si, au contraire, MA est la tangente de (S_j), l'arc sphérique correspondant se projette suivant MA_i devenu ME'.

Lorsque $K'' = 0$, l'équation (47′) se décompose ainsi :

$$(\alpha) \qquad (p' \sin i - q'_1 \cos i)\, ds + (q' \sin i + p'_1 \cos i)\, ds' = 0,$$

$$(\alpha') \qquad (q \sin i + p_1 \cos i)\, ds + (q' \sin i + p'_1 \cos i)\, ds' = 0.$$

Les lignes complémentaires donneraient semblablement :

$$(\beta) \qquad (p' \cos i + q'_1 \sin i)\, ds + (q' \cos i - p'_1 \sin i)\, ds' = 0,$$

$$(\beta') \qquad (q \cos i - p_1 \cos i)\, ds + (q' \cos i - p'_1 \sin i)\, ds' = 0.$$

On peut s'assurer que les lignes (α) et (β) sont *rectangulaires* et que les lignes (α') et (β') *coïncident*.

2° Voici un procédé plus direct pour obtenir, dans le cas général, les lignes (S_i) et (S_j). Il nous permettra de signaler incidemment deux propriétés importantes des pseudo-surfaces.

Calculons d'abord les cosinus directeurs $(\alpha'_\varepsilon, \beta'_\varepsilon, \gamma'_\varepsilon)$ de ME', troisième arête du trièdre tri-rectangle $MNEE'$ (fig. 5). Nous avons

$$\frac{\alpha'_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = b'' \frac{dc''}{dS} - c'' \frac{db''}{dS},$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha'_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = \frac{1}{\sin \Phi}(a P_1 + a' Q_1).$$

Or, en représentant, comme au n° 19, par ω et ω' les angles que fait ME' avec les axes coordonnés, la formule (5) nous permet d'écrire

$$\frac{\alpha'_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = \frac{a}{\sin \Phi} \frac{\sin \omega'}{\rho_\varepsilon} + \frac{a'}{\sin \Phi} \frac{\sin \omega}{\rho_\varepsilon};$$

d'où, par rapprochement,

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin \omega'}{\rho_\varepsilon} &= P_1 = p \sin \varphi' + p' \sin \varphi, \\ \frac{\sin \omega}{\rho_\varepsilon} &= Q_1 = q \sin \varphi' + q' \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

Faisant ensuite

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{ds'}{ds} = \mu, \qquad \frac{\sin \omega}{\sin \omega'} = \frac{\delta s'}{\delta s} = \mu',$$

il vient d'abord

(50) $$Q_1 \delta s - P_1 \delta s' = 0,$$

ce qu'on peut transformer successivement ainsi

$$q\,ds\,\delta s - p\,ds\,\delta s' + q'\,ds'\,\delta s - p'\,ds'\,\delta s' = 0,$$

(50′) $$q - (p\mu' - q'\mu) - p'\mu\mu' = 0,$$

(50″) $$\mu' = \frac{q + q'\mu}{p + p'\mu}.$$

Sous cette dernière forme, on reconnait la relation (39′) entre les directions pseudo conjuguées MA, ME', étendue ici aux coordonnées *obliques*. La précédente montre, en y faisant $\mu = \mu'$, que les lignes asymptotiques (44″) sont à elles-mêmes leur propre direction pseudo-conjuguée. — Mais revenons aux lignes (S_i), (S_j).

Si l'on associe à (50″) l'expression connue

$$\operatorname{tg} i = \frac{(\mu' - \mu)\sin\Phi}{1 + (\mu + \mu')\cos\Phi + \mu\mu'},$$

l'élimination de μ' entr'elles fera retomber sur l'équation (47′) ou (47″) des lignes pseudo-conjuguées (S_i). C'est la solution directe que nous avions annoncée.

Un second résultat à déduire des calculs qui précèdent est celui-ci : considérons la semi-droite représentée par le système

$$a''x + b''y + c''z = 0,$$
$$x\,da'' + y\,db'' + z\,dc'' = 0.$$

Elle n'est autre que la limite de l'intersection du plan tangent en M à la pseudo-surface considérée **F** avec la position infiniment voisine de ce plan, lorsque M est devenu M'. Or cette semi-droite n'est pas distincte de ME', direction pseudo-conjuguée de MA, car leurs cosinus directeurs à chacune sont respectivement proportionnels aux binômes

$$b''\,dc'' - c''\,db'', \qquad c''\,da'' - a''\,dc'', \qquad a''\,db'' - b''\,da''.$$

Ainsi se trouve généralisée la proposition bien connue de Dupin relative aux directions *conjuguées* de son indicatrice.

28. V. — Foyers correspondants.

1° Des équations des lignes de courbure définies par $\frac{1}{\rho_0} = 0$, et des lignes asymptotiques définies par $\frac{1}{\rho''} = 0$, prises respectivement sous

la forme

$$P_1 \cos\varphi + Q_1 \cos\varphi' = 0,$$
$$P_1 \sin\varphi - Q_1 \sin\varphi' = 0,$$

on tire

$$\frac{P_1}{\cos\varphi'} = \frac{-Q_1}{\cos\varphi} = \frac{P_1 \sin\varphi - Q_1 \sin\varphi'}{\sin\Phi} = \frac{1}{\rho''},$$
$$\frac{P_1}{\sin\varphi'} = \frac{Q_1}{\sin\varphi} = \frac{P_1 \cos\varphi + Q_1 \cos\varphi'}{\sin\Phi} = \frac{1}{\rho_0}.$$

Si l'on y fait $\rho'' = F$, et $\rho_0 = f$, on en déduira

$$(51)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin^2\Phi}{F^2} + (q - p')\dfrac{\sin\Phi}{F} + (pq' - qp') = 0, \\ \dfrac{\sin^2\Phi}{f^2} - (p_1 + q_1')\dfrac{\sin\Phi}{f} + (p_1q_1' - q_1p_1') = 0, \end{cases}$$

en remarquant, comme au n° 10, que l'on a identiquement

$$pq' - qp' = p_1q_1' - q_1p_1'.$$

On peut écrire aussi, sous une forme plus simple encore (14):

$$(51')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{F^2} + (q_1 - p_1')\dfrac{1}{F} + (p_1q_1' - q_1p_1') = 0, \\ \dfrac{1}{f^2} - (p + q')\dfrac{1}{f} + (pq' - qp') = 0, \end{cases}$$

avec

$$p_1q_1' - q_1p_1' = pq' - qp'.$$

Dans les équations en $\frac{1}{F}$ on reconnait les foyers dits *optiques* et relatifs au rayon axial MN. Quant à ceux que déterminent les équations en $\frac{1}{f}$, nous les qualifierons d'*anoptiques*, comme dans nos précédentes recherches, et cela, par simple *opposition de mots*.

Sans avoir à disserter longuement ici sur ces couples de points remarquables, nous nous bornerons à en signaler les cas particuliers suivants :

Lorsqu'on a : $p = q' = 0$, ou bien $q_1 = p_1' = 0$, le système (51) devient

$$(51'')\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\sin\Phi}{F} + q\right)\left(\dfrac{\sin\Phi}{F} - p\right) = 0, \\ \left(\dfrac{\sin\Phi}{f} - p_1\right)\left(\dfrac{\sin\Phi}{f} - q_1'\right) = 0; \end{cases}$$

et comme ces deux hypothèses équivalent à $p_1 = q_1' = 0$ et à $q = p' = 0$,

on peut aussi écrire

$$(51''')\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{F}+q_1\right)\left(\frac{1}{F}-p'_1\right)=0, \\ \left(\frac{1}{f}-p\right)\left(\frac{1}{f}-q'\right)=0. \end{cases}$$

2° Des équations des lignes pseudo-conjuguées, d'obliquité constante $\frac{1}{\rho_i}=0$ et de leurs complémentaires $\frac{1}{\rho_j}=0$ (n° 27), prises sous les formes (47) et (48), on tire

$$\frac{P_1}{\sin(\varphi'-i)}=\frac{Q_1}{\sin(\varphi+i)}=\frac{P_1\cos(\varphi+i)+Q_1\cos(\varphi'-i)}{\sin\Phi}=\frac{1}{\rho_j},$$

$$\frac{P_1}{\cos(\varphi'-i)}=\frac{-Q_1}{\cos(\varphi+i)}=\frac{P_1\sin(\varphi+i)-Q_1\sin(\varphi'-i)}{\sin\Phi}=-\frac{1}{\rho_i}.$$

Pour conserver l'analogie avec les deux cas-limites, nous poserons $\rho_j=\mathrm{f}_i$, $\rho_i=\mathrm{f}_j$ et nous aurons ainsi

$$(52)\quad \begin{cases} \frac{\sin^2\Phi}{\mathrm{f}_i^2}-[(\mathrm{p}_1+\mathrm{q}'_1)\cos i \\ \qquad +(\mathrm{q}-\mathrm{p}')\sin i]\frac{\sin\Phi}{\mathrm{f}_i}+(\mathrm{p}\mathrm{q}'-\mathrm{q}\mathrm{p}')=0, \\ \frac{\sin^2\Phi}{\mathrm{f}_j^2}-[(\mathrm{p}_1+\mathrm{q}'_1)\sin i \\ \qquad -(\mathrm{q}-\mathrm{p}')\cos i]\frac{\sin\Phi}{\mathrm{f}_j}+(\mathrm{p}_1\mathrm{q}'_1-\mathrm{q}_1\mathrm{p}'_1)=0. \end{cases}$$

On voit par là que les foyers *dioptiques* ou *moyens* proprement dits f_i, proviennent des lignes pseudo-conjuguées complémentaires (S_j), tandis que les foyers dioptiques complémentaires f_j proviennent des lignes directes (S_i).

Au lieu de (52), on a aussi, plus simplement,

$$(52')\quad \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{f}_i^2}-[(p+q')\cos i \\ \qquad +(q_1-p'_1)\sin i]\frac{1}{\mathrm{f}_i}+(p_1q'_1-q_1p'_1)=0, \\ \frac{1}{\mathrm{f}_j^2}-[(p+q')\sin i \\ \qquad -(q_1-p'_1)\cos i]\frac{1}{\mathrm{f}_j}+(pq'-qp')=0. \end{cases}$$

Examinons brièvement quelques cas d'exception.

α. Si l'on suppose qu'on ait simultanément

$$(53)\qquad \begin{cases} p_1 \sin i - q \cos i = 0, \\ q'_1 \sin i + p' \cos i = 0; \end{cases}$$

ce qui exige, pour qu'il n'y ait pas incompatibilité, que

$$p_1 p' + q q'_1 = 0,$$

l'équation aux foyers moyens proprement dits se réduira (n° 9) à la forme

$$\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\omega_\chi}\right)\left(\frac{1}{f_1} \pm \frac{1}{\omega'_\chi}\right) = 0.$$

C'est là un premier couple de foyers dioptiques *singuliers*.

β. De même, si l'on avait

$$(53')\qquad \begin{cases} p_1 \cos i + q \sin i = 0, \\ q'_1 \cos i - p' \sin i = 0, \end{cases}$$

ce qui entraine la même condition que ci-dessus, on obtiendrait pour foyers dioptiques singuliers complémentaires

$$\left(\frac{1}{f_1} \pm \frac{1}{\omega_\chi}\right)\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\omega'_\chi}\right) = 0.$$

γ. Remarquons encore que, pour que les équations (52') aient mêmes racines, il faut avoir

$$(p + q')^2 + (q_1 - p'_1)^2 = 0,$$

ce qui entraîne $p = -q'$ et $q_1 = p'_1$. On s'assurera aisément, par ce qui a été dit déjà, que ce sont là les conditions qui caractérisent les *surfaces minima*.

II.

Cas particulier où les lignes précédentes appartiennent à une surface.

29. Pour que toutes les théories qui ont été établies jusqu'ici soient (leurs formules y comprises) applicables aux *surfaces*, il suffit, comme on va le voir incessamment, d'y faire partout $p_1 = -q'_1$ ou $p = -q'$. Dans le but toutefois de rendre nos principaux résultats plus *pratiques*, supposons désormais que les arcs s, s' soient des fonctions continues quelconques A et A' de deux paramètres u et u' (n° 4), et qu'il en soit de même des coordonnées x, y, z de tout point du lieu considéré.

On exprimera ce fait en posant

$$ds = A\,du, \qquad ds' = A'du'.$$

Or, en vertu des identités

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial u'}du' = a\,ds + a'ds' = Aa\,du + A'a'du',$$

on a d'abord

$$\frac{\partial x}{\partial u} = Aa, \qquad \frac{\partial x}{\partial u'} = A'a',$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u'} = A\frac{\partial a}{\partial u'} + a\frac{\partial A}{\partial u'},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u'\,\partial u} = A'\frac{\partial a'}{\partial u} + a'\frac{\partial A'}{\partial u}.$$

Les premiers membres étant égaux, par hypothèse, on en conclut

$$AA'\frac{\partial a}{\partial s'} + a\frac{\partial A}{\partial u'} = AA'\frac{\partial a'}{\partial s} + a'\frac{\partial A'}{\partial u}.$$

Remplaçons les dérivées $\frac{\partial a}{\partial s'}$, $\frac{\partial a'}{\partial s}$ par leurs valeurs (8) et (8') et tenons compte des relations (4'). Si l'on égale entr'eux les coefficients de a, a', a'', on trouvera

$$(54)\qquad \begin{cases} n_1 - r_1' \cos\Phi = -\dfrac{\sin\Phi}{AA'}\dfrac{\partial A}{\partial u'}, \\ r_1' - n_1\cos\Phi = \dfrac{\sin\Phi}{AA'}\dfrac{\partial A'}{\partial u}, \\ p_1 + q_1' = 0. \end{cases}$$

Nous remarquons, en passant, que cette dernière condition pouvant s'écrire

$$p + q' - (q + p')\cos\Phi = 0,$$

exprime, par là même (46'''), que les lignes de courbure sont devenues rectangulaires. Or on sait que c'est là précisément ce qui différentie les surfaces d'avec les pseudo-surfaces.

Cette distinction rappelée, si l'on résoud les deux premières équations (54) par rapport à n_1 et à r_1' et qu'on observe, en même temps, que, d'après notre 3ème paragraphe, on a

$$p_1 = p\sin\Phi, \qquad q_1' = q'\sin\Phi, \qquad n_1 = n, \qquad r_1' = r',$$

on pourra remplacer le système (54) par le suivant, non moins utile :

$$(54')\quad \begin{cases} -A n = \dfrac{1}{A' \sin \Phi}\left(\dfrac{\partial A}{\partial u'} - \dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\ A' r' = \dfrac{1}{A \sin \Phi}\left(\dfrac{\partial A'}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right), \\ p + q' = 0 . \end{cases}$$

30. A titre d'application générale, cherchons ce que deviennent, dans le cas des surfaces, les expressions des premières courbures élémentaires de niveau, de profil et de front (n° 13) d'une ligne quelconque tracée sur elle.

1° Courbure de niveau ou tangentielle. — De la formule (41') et de la première des identités (43), on tire facilement

$$(55)\quad \frac{\sin\Phi}{\rho'} = n \sin\varphi' + r' \sin\varphi - \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi'}{\partial u}\sin\varphi' + \frac{1}{A'}\frac{\partial\varphi}{\partial u'}\sin\varphi .$$

Multipliant par $A A' \sin\Phi$ et éliminant n et r' au moyen des valeurs (54'), on obtiendra cette expression très simple de $\frac{1}{\rho'}$:

$$(55')\qquad \frac{A A' \sin\Phi}{\rho'} = \frac{\partial}{\partial u}(A' \cos\varphi') - \frac{\partial}{\partial u'}(A\cos\varphi),$$

expression qui, égalée à zéro, traduit la condition d'intégrabilité de la différentielle totale

$$dS = ds\cos\varphi + ds'\cos\varphi' = (A\cos\varphi)\,du + (A'\cos\varphi')\,du'.$$

Nous allons lui donner une autre forme. A cet effet, posons, à l'exemple de Gauss :

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = A^2, \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u'}\right)^2 = A'^2, \quad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u'} = B''.$$

On en déduira aisément

$$\cos\Phi = \frac{B''}{A A'}, \qquad \sin\Phi = \frac{1}{A A'}\sqrt{A^2 A'^2 - B''^2} = \frac{H}{A A'} .$$

D'autre part,

$$dS\cos\varphi = ds + ds'\cos\Phi,$$
$$dS\cos\varphi' = ds' + ds\cos\Phi.$$

Multipliant respectivement par $\frac{ds}{dS}$ et $\frac{ds'}{dS}$, on voit que

$$A\cos\varphi = \frac{A^2\,du + B''\,du'}{dS},$$

$$A'\cos\varphi' = \frac{B''\,du + A'^2\,du'}{dS}.$$

Il n'y a plus qu'à substituer ces valeurs dans (55') et l'on aura pour l'expression cherchée

$$(55'')\quad \frac{H}{\rho'} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B''\,du + A'^2\,du'}{dS}\right) - \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{A^2\,du + B''\,du'}{dS}\right).$$

2° Courbure de profil ou normale. — Sa valeur déduite de la seconde des équations (23) peut, en y introduisant la condition $p_1 + q'_1 = 0$, s'écrire ainsi :

$$(56)\qquad \frac{dS^2}{\rho''} = -\,q_1\,ds^2 + 2\,p_1\,ds\,ds' + p'_1\,ds'^2,$$

ou bien

$$(56')\qquad \frac{dS^2}{\rho''} = -\,A^2 q_1\,du^2 + 2\,AA'\,p_1\,du\,du' + A'^2\,p'_1\,du'^2,$$

avec

$$dS^2 = A^2\,du^2 + A'^2\,du'^2 + 2\,B''\,du\,du'.$$

Cela étant, remontons aux déterminants du n° 25. On verra d'abord, toutes nos restrictions antérieures écartées, qu'à cause de

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial s'^2} = \frac{1}{A'^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u'^2},\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial s'} = \frac{1}{AA'}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u'},$$

si l'on fait

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u'} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u'} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u'} \end{vmatrix},$$

puis, qu'on représente par D', D'' deux autres déterminants qui ne diffèrent du précédent qu'en ce que la première colonne ait pour éléments $\frac{\partial^2 x}{\partial u'^2}\dots$ dans le premier et $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u'}$ ou $\frac{\partial^2 x}{\partial u'\,\partial u}$ indifféremment, dans le deuxième, on aura

$$(57)\qquad -A^2 q_1 = \frac{D}{H},\qquad A'^2 p'_1 = \frac{D'}{H},\qquad AA'\,p_1 = \frac{D''}{H},$$

et, par suite, la valeur de la première courbure normale que nous vou-

lions obtenir pourra s'écrire

$$(56'') \qquad \frac{H}{\rho''} = \frac{D\,du^2 + D'du'^2 + 2D''du\,du'}{A^2du^2 + A'^2du'^2 + 2B''du\,du'}.$$

3° Courbure de front. — En développant l'équation (24) où l'on aura fait $p_1 = -q'_1$ (condition caractéristique des surfaces), il vient d'abord

$$(58) \quad \begin{cases} \dfrac{dS^2}{\rho_0}\sin\Phi = (p_1 + q_1\cos\Phi)\,ds^2 \\ \qquad\qquad + (q_1 + p'_1)\,ds\,ds' - (p_1 - p'_1\cos\Phi)\,ds'^2, \end{cases}$$

et, finalement,

$$(58') \quad \begin{cases} \dfrac{dS^2}{\rho_0}H^2 = (A^2D'' - B''D)\,du^2 \\ \qquad\qquad - (A'^2D - A^2D')\,du\,du' - (A'^2D'' - B''D')\,du'^2. \end{cases}$$

31. Avec des formules ainsi préparées, l'expression usuelle ou pratique de toute ligne remarquable située sur une surface devient facile.

1° Si l'on fait $\dfrac{1}{\rho'} = 0$ dans (55') et (55''), on aura pour l'équation des lignes *géodésiques* :

$$\frac{\partial}{\partial u}(A'\cos\varphi') = \frac{\partial}{\partial u'}(A\cos\varphi),$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B''du + A'^2du'}{dS}\right) = \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{A^2du + B''du'}{dS}\right).$$

C'est de cette seconde forme que nous allons nous servir préférablement.

1er Exemple. — Posons

$$u = x, \qquad u' = y, \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

et, par suite,

$$(59) \qquad A^2 = 1 + p^2, \qquad A'^2 = 1 + q^2, \qquad B'' = pq.$$

L'équation des lignes géodésiques deviendra

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dy + q\,dz}{dS}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dx + p\,dz}{dS}\right),$$

avec

$$dS^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + (1 + q^2)\,dy^2 + 2pq\,dx\,dy.$$

On en tire, en faisant $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$,

$$(55''') \left\{ \begin{aligned} &(p\,dx - q\,dy)[(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2) \\ &\qquad - (1 + p^2 + q^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x)] = 0. \end{aligned} \right.$$

Or ceci équivaut à

$$(55^{\text{IV}}) \left\{ \begin{aligned} &p(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + q(dz\,d^2x - dx\,d^2z) \\ &\qquad - (dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0, \end{aligned} \right.$$

si l'on a soin d'éliminer de cette dernière les différentielles totales de z. On retrouve ainsi l'équation générale ordinaire des lignes géodésiques.

2ème Exemple. — Considérons, comme cas particulier, l'hélicoïde gauche à plan directeur représenté par le système

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = a\theta.$$

En posant ici $u = \theta$, $u' = \rho$, on a d'abord

$$A^2 = \rho^2 + a^2, \qquad A'^2 = 1, \qquad B'' = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + (\rho^2 + a^2)d\theta^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(\rho^2 + a^2)d\theta}{\sqrt{d\rho^2 + (\rho^2 + a^2)d\theta^2}}\right);$$

d'où, en prenant θ pour variable indépendante :

$$\left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\right)\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - 2\frac{d\rho^2}{d\theta^2} - (\rho^2 + a^2) = 0,$$

équation différentielle de la projection, sur le plan directeur, des lignes géodésiques de l'hélicoïde.

2° Des formules (56) et (56''), on tire cette double forme de l'équation des lignes *asymptotique* :

$$(60) \qquad -q_1\,ds^2 + 2p_1\,ds\,ds' + p_1'\,ds'^2 = 0,$$

ou bien

$$(60') \qquad D\,du^2 + 2D''du\,du' + D'du'^2 = 0.$$

Faisant, dans cette dernière, $u = x$, $u' = y$, on aura d'abord

$$(61) \qquad D = r, \qquad D'' = s, \qquad D' = t,$$

d'où la forme connue

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

S'il s'agit, en particulier, de l'hélicoïde gauche ci-dessus, on a

$$D = 0, \qquad D'' = -a, \qquad D' = 0.$$

Conséquemment, il vient

$$\rho\,d\rho\,d\theta = 0,$$

ce qui donne, sur le plan directeur, des circonférences concentriques et leurs trajectoires orthogonales qui sont les rayons.

3° Les lignes *de courbure* d'une surface, c'est-à-dire celles pour laquelle la courbure de front $\frac{1}{\rho_0}$ (bien inexactement appelée *seconde courbure géodésique* ou *torsion géodésique*) est nulle, ont pour équation :

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned}&(p_1 + q_1 \cos\Phi)\,ds^2\\ &\qquad + (q_1 + p'_1)\,ds\,ds' - (p_1 - p'_1\cos\Phi)\,ds'^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(62')\quad \left\{\begin{aligned}&(A^2 D'' - B'' D)\,du^2\\ &\qquad - (A'^2 D - A^2 D')\,du\,du' - (A'^2 D'' - B'' D')\,du'^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

En posant $u = x$, $u' = y$ et ayant égard aux valeurs (59) et (60), cette dernière se réduit à

$$(62'')\quad \left\{\begin{aligned}&[(1 + p^2)s - pqr]\,dx^2\\ &\quad + [(1 + r^2)t - (1 + q^2)r]\,dx\,dy - [(1 + q^2)s - pqt]\,dy = 0,\end{aligned}\right.$$

ce qui est bien l'équation ordinaire des lignes de courbure.

α. Entr'autres propriétés, observons que si l'on pose $\frac{ds'}{ds} = \mu$, l'équation (62) de ces lignes prend la forme

$$A + B\mu + C\mu^2 = 0.$$

La condition d'orthogonalité

$$A + C - B\cos\Phi = 0$$

est donc ici satisfaite.

β. Il y a plus : cette équation (62) est explicitement de la forme

$$(B_1 - A_1\cos\Phi) - (A_1 - C_1)\mu - (B_1 - C_1\cos\Phi)\mu^2 = 0.$$

Les lignes de courbure d'une surface sont donc tangentes aux sections principales.

γ. Supposons que l'on ait $q_1 p'_1 + p_1^2 = 0$ ou $K'' = 0$. L'équation des lignes de courbure se décomposera, comme au n° 26, en deux facteurs réels du premier degré, faciles à former. La surface est alors développable.

δ. Enfin, par (62′) on voit que, pour que par le point M il passe une infinité de lignes de courbure, etc., il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{D}{A^2} = \frac{D''}{B''} = \frac{D'}{A'^2}.$$

Or ceci, en coordonnées rectangulaires, peut se transformer de la façon

suivante :

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}.$$

A ces conditions on reconnait celles qui définissent les *ombilics* d'une surface.

4° Les lignes *conjuguées*, d'obliquité i, admettent, entr'autres formes d'équations, la suivante :

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned}&[p\sin i-q\sin(\Phi-i)]\,ds^2\\&\quad+\{[q\sin i+p\sin(\Phi+i)]+[p'\sin i+p\sin(\Phi-i)]\,ds\,ds'\\&\qquad-[p\sin i-p'\sin(\Phi+i)]\}\,ds'^2=0,\end{aligned}\right.$$

forme qu'il est d'ailleurs facile d'étendre aux conjuguées *complémentaires* par le seul changement de i en $i\pm\frac{\pi}{2}$.

Quoiqu'il en soit, si, dans la précédente, on pose $i=0$ ou bien $i=\pm\frac{\pi}{2}$, on retrouvera les lignes asymptotiques ou les lignes de courbure de la surface.

Enfin, on peut encore obtenir l'équation (63) en exprimant directement que MA et ME sont deux directions conjuguées, ce qui, d'après (50'), exige que l'on ait

$$\mu'=\frac{q-p\mu}{p+p'\mu},$$

puisque actuellement $p+q'=0$. Le calcul se poursuivra ensuite comme au n° 27.

LIVRE II.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES PSEUDO-SURFACES.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS AUTOUR D'UN POINT.

I.

Indicatrice d'une pseudo-surface.

32. Reprenons l'expression de la première courbure de profil ou verticale (n° 13) d'une courbe quelconque (S) tracée sur une pseudo-surface **F**, savoir

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sin \Phi}{\rho''} = P_1 \sin \varphi - Q_1 \sin \varphi'.$$

On peut l'écrire, suivant le cas :

$$\text{(1')} \qquad \frac{\sin^2 \Phi}{\rho''} = - \mathrm{q}_1 \sin^2 \varphi' + (\mathrm{p}_1 - \mathrm{q}'_1) \sin \varphi \sin \varphi' + \mathrm{p}'_1 \sin^2 \varphi,$$

$$\text{(1'')} \qquad \frac{\sin^3 \Phi}{\rho''} = \mathbf{D} \sin^2 \varphi' + (\mathbf{D}'' + \mathbf{D}''_1) \sin \varphi \sin \varphi' + \mathbf{D}' \sin^2 \varphi,$$

$$\text{(1''')} \qquad \frac{\sin^2 \Phi}{\rho''} = \frac{\sin^2 \varphi'}{R_Z} + \left(\frac{1}{M_Z} + \frac{1}{N'_Z}\right) \sin \varphi \sin \varphi' + \frac{\sin^2 \varphi}{R'_Z}.$$

L'avantage particulier que présente cette dernière forme est de bien faire voir (n° 7) comment $\frac{1}{\rho''}$ s'exprime en fonction des premières courbures verticales absolues $\frac{1}{R_Z}$, $\frac{1}{R'_Z}$, et alternantes $\frac{1}{M_Z}$, $\frac{1}{N'_Z}$, des lignes coordonnées (s) et (s').

Cela étant, posons

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi}\sqrt{\rho''} = X, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}\sqrt{\rho''} = Y,$$

il viendra

$$(2) \qquad -\mathrm{q}_1 X^2 + (\mathrm{p}_1 - \mathrm{q}'_1) X Y + \mathrm{p}'_1 Y^2 = 1,$$

ou bien (14')

$$(2') \qquad -q X^2 + (p - q') X Y + p' Y^2 = \frac{1}{\sin\Phi},$$

ou encore

$$(2'') \qquad \frac{X^2}{R_Z} + \left(\frac{1}{M_Z} + \frac{1}{N'_Z}\right) X Y + \frac{Y^2}{R'_Z} = 1.$$

C'est l'équation d'une conique située dans le plan horizontal des $X Y$ et que sa construction même nous conduit à qualifier du nom d'*indicatrice* de la pseudo-surface **F**, au point M. Elle appartient d'ailleurs aux genres, ellipse, hyperbole ou parabole selon que la quantité $\frac{1}{R_Z R'_Z} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{M_Z} + \frac{1}{N'_Z}\right)^2$ est, ou positive ou négative ou nulle.

33. Remarquons dès-à-présent que cette indicatrice (2'') peut être envisagée comme l'indicatrice proprement dite d'une *surface* osculatrice fictive F_m qui aurait pour courbure normale alternante de ses courbes génératrices (s) et (s') la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{M_Z} + \frac{1}{N'_Z}\right)$. Une telle surface *moyenne*, qui se trouve ainsi avoir mêmes lignes asymptotiques que toutes les pseudo-surfaces pour lesquelles la demi-somme précédente garde la même valeur au point considéré nous sera fort utile dans la suite. Mais revenons aux équations (2) et (2'').

On peut en déduire immédiatement l'équation aux carrés des inverses des demi-axes de la conique qu'elles représentent. On a pour la première :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin^2\Phi}{\mathbf{R}^2} + [\mathrm{q}_1 - \mathrm{p}'_1 + (\mathrm{p}_1 - \mathrm{q}'_1)\cos\Phi]\dfrac{1}{\mathbf{R}} \\ \qquad\qquad - \left[\mathrm{q}_1 \mathrm{p}'_1 + \dfrac{1}{4}(\mathrm{p}_1 - \mathrm{q}'_1)^2\right] = 0. \end{cases}$$

La seconde nous donne semblablement

$$(3') \quad \begin{cases} \dfrac{\sin^2\Phi}{\mathbf{R}^2} - \left[\dfrac{1}{R_Z} + \dfrac{1}{R'_Z} - \left(\dfrac{1}{M_Z} + \dfrac{1}{N'_Z}\right)\cos\Phi\right]\dfrac{1}{\mathbf{R}} \\ \qquad\qquad + \left[\dfrac{1}{R_Z R'_Z} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{M_Z} + \dfrac{1}{N'_Z}\right)^2\right] = 0. \end{cases}$$

De celle-ci, par exemple, on tire, outre les rayons principaux de courbure **R** ou R, **R'** ou R', soit de **F**, soit de F_m, les invariants :

$$J = \frac{\frac{1}{R_Z} + \frac{1}{R'_Z} - \left(\frac{1}{M_Z} + \frac{1}{N'_Z}\right)\cos\Phi}{\sin^2\Phi} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'},$$

$$J' = \frac{\frac{1}{R_Z R'_Z} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{M_Z} + \frac{1}{N'_Z}\right)^2}{\sin^2\Phi} = \frac{1}{RR'}.$$

Du premier d'entr'eux, égalé à zéro, nous concluons incidemment, à l'instar des surfaces, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une pseudo-surface soit minima, à savoir $R + R' = 0$, revient, d'après (1'), à

(4) $$q_1 - p'_1 + (p_1 - q'_1)\cos\Phi = 0.$$

Et comme ceci équivaut à

(4') $$q - p' = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad q_1 - p'_1 = 0,$$

on voit que cette condition exprime, sous diverses formes, que les lignes asymptotiques de **F** sont *rectangulaires*.

Rapportée à ses axes de figure, l'indicatrice (2) prend dès-lors la forme *réduite*

(5) $$\frac{X^2}{R} + \frac{Y^2}{R'} = 1,$$

en même temps que la courbure verticale ci-dessus devient

(6) $$\frac{1}{\rho''} = \frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'}.$$

34. Pour appliquer ces résultats aux surfaces, en général, on remarquera que, en partant de la forme (2') et ayant égard à la condition $p + q' = 0$, on peut écrire tout d'abord ainsi l'indicatrice de F

$$-qX^2 + 2pXY + p'Y^2 = \frac{1}{\sin\Phi}.$$

Que si les coordonnées deviennent rectangulaires et que les plans coordonnés soient des plans principaux, il faudra avoir en sus $\Phi = \frac{\pi}{2}$, $p = q' = 0$, et l'on retrouvera alors la forme (5) sous les conditions

$$R = -\frac{1}{q}, \quad R' = \frac{1}{p'}.$$

II.

Analogies entre la courbure des pseudo-surfaces et celle des surfaces.

35. Avant de nous occuper de la courbure des pseudo-surfaces, arrêtons-nous d'abord à celle des surfaces.

Tout ne semble-t'il pas avoir été dit sur cette question dans laquelle de savants géomètres ne veulent plus voir rien autre chose qu'une fastidieuse question de mots, par cette raison que, prise dans sa généralité, la courbure d'une surface n'offre à l'esprit qu'une idée assez confuse et qu'il devient dès lors possible d'en donner des expressions également plausibles, offrant chacune ses avantages, sans qu'aucune satisfasse pleinement.

S'il en était véritablement ainsi, nous aurions mauvaise grâce à songer à passer outre; mais, on le sait, malgré ces fins de non recevoir, les avis restent *partagés*. Nous rangeant donc sans hésitation parmi les dissidents, nous espérons faire voir avec netteté que la question admet une solution très simple, seule acceptable entre toutes, à notre avis, et commune d'ailleurs aux pseudo-surfaces et aux surfaces. Qu'on nous permette seulement, en vue de la clarté de l'exposition, de reprendre les choses d'un peu plus haut.

36. Soit M un point que nous supposerons tout d'abord situé sur une sphère. N'est-il pas évident que la courbure de la sphère, tout autour de ce point, est parfaitement définie par celle des grands cercles qui s'y coupent, c'est-à-dire par $\frac{1}{R}$? Partant de là nous dirons : la courbure d'une surface en chacun de ses points et pour une direction quelconque issue de ce point, n'est autre que la courbure de la section normale faite suivant cette direction même.

Ceci posé, représentons-nous portées sur la normale MN et à partir du point M, les longueurs $\frac{1}{\rho''}$ ou r des courbures des diverses sections normales de la surface; puis, rabattons-les chacune suivant l'intersection du plan tangent avec le plan normal qui la contient. Les extrémités de ces longueurs détermineront une certaine courbe dont la forme suffira déjà pour rendre manifeste, graphiquement du moins, la variation des

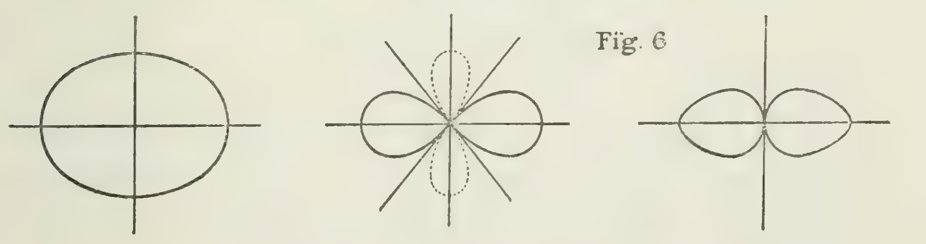
courbures normales successives et, comme conséquence de notre définition, celle de la courbure elle-même de la surface tout autour de *M*. Nous donnerons à cette courbe le nom d'*indicatrice plane de courbure*.

La même construction est, de tout point, applicable aux pseudo-surfaces, pour deux motifs surtout, d'abord parce qu'elles ont, elles aussi, une indicatrice proprement dite, que les longueurs $\sqrt{\rho''}$ servent à construire, et qu'en second lieu, cette indicatrice est identique à celle de la surface auxiliaire F_m que nous avons déjà fait connaître (n° 32).

De là vient que le lieu nouveau qui nous occupe est susceptible d'être représenté par une équation réduite de même forme, soit qu'il s'agisse de surfaces, soit qu'il s'agisse de pseudo-surfaces. Cette équation est (n° 33):

$$r = \frac{\cos^2 \varphi}{R} + \frac{\sin^2 \varphi}{R'} . \tag{7}$$

L'indicatrice plane de courbure qu'elle définit n'est autre que la transformée par rayons vecteurs réciproques de la courbe du 4ème ordre dont (6) est l'équation en coordonnées polaires ρ et φ. Elle est elle-même du sixième ordre et présente trois variétés selon que les rayons principaux R et R' sont de même signe ou de signe contraire, ou que l'un d'eux, R' par exemple, est infini.



37. C'est avec ces rayons que se forment les expressions diverses qui ont été successivement proposées comme mesure de la courbure des surfaces. Nous ne pouvons ne pas discuter en peu de mots les principales de ces expressions. Nous le ferons en les appliquant à la surface F_m, ce qui revient, comme on l'a dit, à les appliquer à la pseudo-surface **F** elle même.

1° $K_1 = \frac{1}{RR'}$. — Cette expression de la courbure (dite *totale*) dûe à Gauss, peut, à la rigueur, être acceptée tant que les rayons R et R' ont des valeurs finies, de même signe ou de signe contraire. Mais lorsque

l'un d'eux est infini, on est obligé d'admettre que la surface F_m, devenue développable en vertu de l'hypothèse $K_1 = 0$, a une courbure identiquement *nulle* en chacun de ses points, et cela, avant même que d'être développée !... Bien plus, pour être conséquent, on doit dire qu'en se déformant d'une infinité de manières, la courbure de cette surface reste rigoureusement *la même* pourvu que K_1 ne change pas, etc. Faut-il s'étonner qu'un grand nombre de géomètres aient reculé devant de pareilles conséquences, quelles que puissent être d'ailleurs les analogies séduisantes qu'à son point de départ la théorie de GAUSS offre avec la courbure des lignes en général? *).

2° $K_2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}$. — En adoptant cette formule, on remplace la composante $\frac{1}{\rho''}$ de la déviation verticale $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$ par cette déviation elle-même (n° 13) et, conséquemment, l'indicatrice (5) par la *déviatrice*

$$\frac{X^2}{R^2} + \frac{Y^2}{R'^2} = 1. \tag{8}$$

Or, on rend de la sorte impossible toute distinction entre la convexité et la concavité de F_m autour du point μ, chose essentielle pourtant lorsqu'il s'agit de courbure.

Au facteur $\frac{\pi}{2}$ près, la valeur de K_2 est celle de l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \left(\frac{\cos^2\varphi}{R^2} + \frac{\sin^2\varphi}{R'^2}\right) d\varphi.$$

3° $K_3 = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$. — Cette troisième expression, dûe à SOPHIE GERMAIN, tombe en défaut quand F_m est une surface minima et, par suite, quand les pseudo-surfaces qu'elle remplace le sont aussi. Au facteur $\frac{\pi}{2}$ près, la valeur de K_3 est celle de l'intégrale

$$\int_0^\pi \left(\frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'}\right) d\varphi.$$

4° $K_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$. — Ceci revient à prendre pour mesure

---

*) Au sujet du produit RR' et de son analogue $R_1R'_1$, *voir* dans le Bulletin de la Société Mathématique de France (t. XXVI, p. 114) notre Note intitulée: *Sur une formule d'*ENNEPER *et sa corrélative,* à savoir:

$$\tau_0 = \pm\sqrt{-RR'} \qquad \text{et} \qquad \tau'' = \pm\sqrt{-R_1R'_1}.$$

de la courbure de F_m sa courbure *sphérique* ou *moyenne*; mais on retrouve les mêmes cas d'exception qu'avec K_3.

5° $K_5 = \frac{1}{R^2} + \frac{2}{3RR'} + \frac{1}{R'^2}$. — Seule, cette dernière formule, dûe à BOURGET et HOUSEL, nous parait, malgré sa complication relative, digne de toute attention. Au lieu d'avoir trait comme les précédentes, à la somme, à la demi-somme, au produit, etc. des demi-axes de l'indicatrice plane de courbure (6), c'est à l'aire même de cette courbe qu'elle se rapporte. Cette heureuse innovation présente des avantages tels que nous l'avons résolument adoptée comme base de nos propres recherches.

III.

Indicatrice convexe de courbure d'une pseudo-surface. Volumes indicateurs.

38. Calculons, tout d'abord, à l'aide de l'intégrale $\frac{1}{2}\int r^2 d\varphi$, l'aire de l'indicatrice plane de courbure (7) dans les divers cas qu'elle présente.

Si l'on désigne généralement par A_ϖ cette aire, on trouvera pour correspondre aux trois variétés du lieu, savoir :

$$(9)\quad \begin{cases} r = \dfrac{\cos^2\varphi}{R} + \dfrac{\sin^2\varphi}{R'}, \\ r = \dfrac{\cos^2\varphi}{R} - \dfrac{\sin^2\varphi}{R'}, \\ r = \dfrac{\cos^2\varphi}{R}, \end{cases}$$

$$(9')\quad \begin{cases} A_{\varpi_1} = \dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{3}{R^2} + \dfrac{2}{RR'} + \dfrac{3}{R'^2}\right), \\ A_{\varpi_2} = \dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{3}{R^2} - \dfrac{2}{RR'} + \dfrac{3}{R'^2}\right), \\ A_{\varpi_3} = \dfrac{\pi}{8}\,\dfrac{3}{R^2}. \end{cases}$$

Posons-nous maintenant la question suivante :

N'est-il pas possible de remplacer ces indicatrices *planes* dont la construction artificielle ne fournit d'ailleurs qu'une solution approchée du problème par des surfaces *convexes* correspondantes Σ, mesurant, en toute exactitude géométriquement, par elles-mêmes d'abord et numériquement par leur aire ensuite, la courbure de la pseudo-surface **F** au

point M ou, ce qui revient au même, celle de la surface auxiliaire F_m, en ce même point? On le peut en effet et voici de quelle manière :

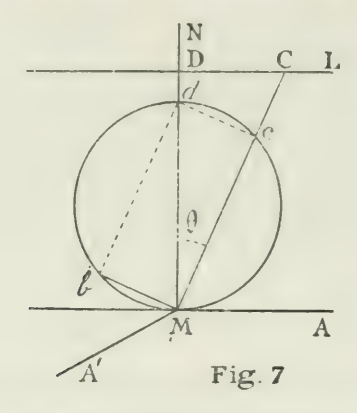


Fig. 7

Soit MA une direction quelconque, prise dans le plan tangent et faisant avec MX un angle égal à φ. Soit MD ou ρ le rayon de courbure de la section normale produite dans la surface F_m par le plan NMA. Sur DL parallèle à MA, prenons un point quelconque C; puis, marquons sur MC le point c tel que l'on ait $MC.Mc = 1$. Le lieu de ce point est une circonférence dont le diamètre Md satisfait à la relation $MD.Md = 1$, ou bien $\rho r = 1$, et qui a pour équation $\rho = r\cos\theta$.

Si maintenant on imagine que la droite MA tourne autour du point M, de manière que, dans chacune de ses positions, la distance MD des deux parallèles reste égale au rayon de courbure de la section normale correspondante, la circonférence Mdc engendrera une surface Σ qui, mesurant exactement, *dans chacune des directions* issues du point M, la courbure de la surface F_m, mesure par là-même, exactement, d'après notre définition (n° 36), la courbure proprement dite de cette surface en ce point.

Formons l'équation du lieu que nous venons de définir. Il suffit pour cela de remplacer, dans l'équation du cercle ci-dessus, r par sa valeur (7), et l'on aura ainsi pour les trois cas que comporte la question et dans le double système de coordonnées rectangulaires et polaires :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'}\right)\cos\theta,\\ \rho &= \left(\frac{\cos^2\varphi}{R} - \frac{\sin^2\varphi}{R'}\right)\cos\theta,\\ \rho &= \frac{\cos^2\varphi}{R}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

$$(10')\quad \begin{cases} X^2+Y^2+Z^2=\dfrac{(R'X^2+RY^2)Z}{RR'(X^2+Y^2)}, \\ X^2+Y^2+Z^2=\dfrac{(R'X^2-RY^2)Z}{RR'(X^2+Y^2)}, \\ X^2+Y^2+Z^2=\dfrac{X^2Z}{R(X^2+Y^2)}. \end{cases}$$

Ce sont là trois surfaces fermées. Dans la première, les diamètres des sections normales varient entre un maximum $\frac{1}{R}$ et un minimum $\frac{1}{R'}$ (nous supposons $R' > R$). Dans la deuxième, les plans verticaux conduits suivant les tangentes, à l'origine, de l'indicatrice plane correspondante lui sont tangents et la divisent en quatre parties symétriques deux-à-deux et situées de part et d'autre du plan des XY. Quant à la troisième surface, elle dérive de la seconde en ce que les plans tangents dont nous venons de parler s'y trouvent en coïncidence.

39. Au point de vue *géométrique*, l'introduction de nos indicatrices convexes résoud d'une manière, à la fois simple et adéquate, le problème de la courbure, soit des surfaces, soit des pseudo-surfaces, en chacun de leurs points ; mais il n'en est pas de même au point de vue *numérique*. Les aires de ces nouvelles indicatrices dépendant des fonctions elliptiques sont trop compliquées dans leur expression pour pouvoir être utilisées telles quelles. Il devient nécessaire pratiquement de substituer aux valeurs exactes des valeurs approchées. Or, chose remarquable, il est possible, à l'aide d'une légère transformation, de faire prendre aux indicatrices convexes une aire *rigoureusement* égale à celle des indicatrices planes qui leur correspondent, ce qui nous permettra, entr'autres avantages, de juger avec certitude du degré de précision que comporte la méthode de Bourget et Housel.

A cet effet, imaginons qu'on substitue à chacun des éléments *fusiformes* dont se composent les indicatrices convexes, le fuseau sphérique de rayon $\frac{r}{2}$ et d'angle $d\varphi$ suivant lequel il se projette sur la sphère d'égal diamètre. Il arrivera alors que le plan tangent en chacun des points de ce second fuseau se trouvant perpendiculaire à la section normale que ce point détermine, fera, avec le plan tangent en M à la surface F_m, un angle égal à 2θ ou à $\pi - 2\theta$.

En représentant par $u\,du\,d\varphi$ la projection sur le plan des XY d'un

élément infinitésimal de ce second fuseau, on aura pour l'aire A_{σ_1} de la première des surfaces Σ transformée ou, pour ainsi dire, *sphéricisée* de la sorte :

$$A_{\sigma_1} = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{r}{2}} \frac{u\,du}{\cos 2\theta},$$

avec les relations

$$u = \rho \sin\theta, \qquad \rho = r\cos\theta, \qquad r = \frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'}.$$

On en tire

$$\sin 2\theta = \frac{2u}{\dfrac{\cos^2\varphi}{R} + \dfrac{\sin^2\varphi}{R'}}.$$

Portant dans A_{σ_1} la valeur de $\cos 2\theta$ qui en résulte, l'intégration par rapport à u aboutit et il vient

$$A_{\sigma_1} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi.$$

Or c'est là justement le calcul qu'il faut faire pour avoir (n° 38) l'aire complète de la première des indicatrices planes. On a donc $A_{\sigma_1} = A_{\varpi_1}$. C. Q. F. D.

Des calculs analogues permettent d'étendre cette propriété aux deux autres surfaces ; mais il ne sont pas nécessaires, car il suffit, pour l'une, de remplacer dans le résultat précédent R′ par — R′, et pour l'autre, de supposer R′ infini.

40. Volumes indicateurs. — Poursuivons notre étude, en nous reportant à la *Fig.* 7. Menons-y Mb perpendiculaire à Mc. Ces deux longueurs, issues du point M, étant les composantes orthogonales de la courbure normale Md ou $\frac{1}{\rho}$ qui mesure, comme on l'a dit, dans la direction MA, la courbure de la surface $F_{,,,}$, peuvent, par-là même, se substituer à elle. Leur lieu géométrique est d'ailleurs la surface du cercle $Mbcd$. Or, lorsque ce cercle, dont le diamètre varie avec $\frac{1}{\rho}$, tourne autour de la normale MN, il engendre un volume qui se trouve être ainsi le lieu des composantes orthogonales de toutes les sections normales faites dans la surface tout autour du point M.

En raison de cette propriété, on peut considérer ce volume, sinon comme mesurant, du moins comme représentant, *suo modo*, la courbure en M de $F_{,,,}$.

Il y a plus : un tel volume qui n'est autre, remarquons-le, que celui de l'indicatrice convexe de courbure elle-même, offre ceci de particulier qu'il peut être calculé facilement et en toute rigueur, vû que les quantités qu'on y néglige sont infiniment petites par rapport aux onglets élémentaires dont ce volume se compose, ce qui n'a pas lieu dans le calcul de l'aire correspondante, non encore sphéricisée.

1° Reprenons la première des surfaces Σ. La formule à lui appliquer étant

$$V_1 = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'}\right)^3 \cos^3\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} r^3 \, d\varphi,$$

on trouve sans difficulté

$$V_1 = \frac{\pi}{96}\left(\frac{5}{R^2} - \frac{2}{RR'} + \frac{5}{R'^2}\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

2° En ce qui concerne le second volume, comme l'intégrale qui l'exprime change de signe pour les directions $\operatorname{tg}\varphi_1 = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}$ qui sont celles des tangentes à l'origine, il faut employer l'intégrale dédoublée

$$\frac{1}{3}\int_0^{\varphi_1} r^3 \, d\varphi - \frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \, d\varphi.$$

En posant, pour plus de symétrie,

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \frac{\pi}{4},$$

$$P = \frac{1}{144}\left(\frac{3.5}{R^2} - \frac{2.7}{RR'} + \frac{3.5}{R'^2}\right)\frac{1}{\sqrt{RR'}},$$

$$Q = \frac{1}{48}\left(\frac{5}{R^2} + \frac{2}{RR'} + \frac{5}{R'^2}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

on a pour le volume total

$$V_2 = 2P + 2Q\varphi_1',$$

et pour les volumes partiels :

$$\mathcal{V}_2 = P + Q\left(\varphi_1' + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathcal{V}_2' = P + Q\left(\varphi_1' - \frac{\pi}{4}\right),$$

le premier étant situé au dessus du plan tangent en M et le second, au dessous.

Ces résultats se simplifient notablement lorsque $R = R'$, ce qui est le cas (à cause du signe — que nous avons explicité) des pseudo-surfaces *minima*. On a alors simplement

$$V_2 = V_2' = P = \frac{1}{9 R^3},$$

valeur que le calcul direct de l'intégrale $\frac{1}{3 R^3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2\varphi \, d\varphi$ permet de vérifier.

3° Le troisième volume se tire de l'un quelconque des deux premiers en y posant $R' = \infty$. On trouve

$$V_3 = \frac{5}{96} \frac{\pi}{R^3}.$$

41. Faisons un dernier pas en considérant le cylindre droit circonscrit à l'indicatrice convexe de courbure, dont la trace, sur le plan des XY, n'est autre que le contour apparent de cette indicatrice sur ce même plan. Calculons le volume compris entre la base du cylindre, sa surface latérale et celle de l'indicatrice, en ayant soin de limiter ce volume à la courbe de contact.

Si l'on représente par U_1 celui de ces volumes qui correspond à la première des indicatrices Σ, on aura

$$U_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{r}{2}} Z u \, du,$$

avec la relation

$$u^2 = Z(r - Z).$$

Tirant de cette équation du $2^{\text{ème}}$ degré en Z la plus petite racine et la substituant dans U_1, on trouve

$$U_1 = \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{R} + \frac{\sin^2 \varphi}{R'} \right)^3 d\varphi = \frac{1}{4} V_1.$$

Ainsi le volume cherché est le quart de celui du *solide indicateur* correspondant. On en conclut que les deux volumes peuvent, au même titre, représenter la courbure de la surface F_m en chacun de ses points.

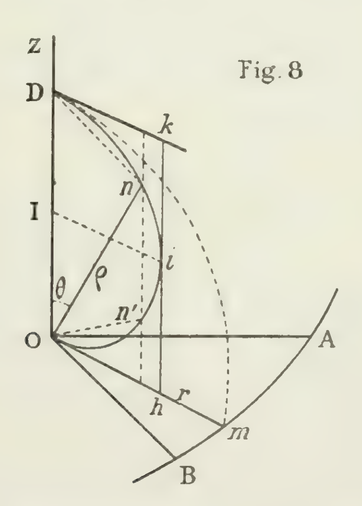
Il est à remarquer que la base du *cylindre indicateur* de courbure est homothétique à l'indicatrice plane de BOURGET et HOUSEL et, de plus, qu'elle en vaut le quart. On peut donc négliger celle-ci et ne retenir que la première.

42. Les propriétés géométriques que nous venons de signaler ne sont, au fond, qu'une première extension des théorèmes qu'ARCHIMÈDE a découverts dans la sphère et son cylindre circonscrit. Pour ce motif, nous croyons qu'il ne sera pas sans intérêt de montrer, dans une courte digression, de quels théorèmes, plus généraux encore, ces propriétés dérivent.

IV.

Généralisation des résultats précédents. Théorèmes sur les hémicyclides.

43. Nous appelons surfaces *hémicyclidales* ou simplement *hémicyclides,* les surfaces engendrées par un demi-cercle dans les conditions suivantes :



Soient AB un arc de courbe algébrique ou transcendante; $AOB = \Phi$, le secteur correspondant à un pôle O donné. Relevons sur la normale au plan menée au pôle chacun des rayons vecteurs qui aboutissent aux divers points de l'arc pour en faire le diamètre OD d'un demi-cercle situé dans le plan du rayon considéré et de la normale.

THÉORÈME I. — *L'aire du secteur donné est exactement égale à celle de la surface transformée qu'on obtient en substituant à chacun des éléments fusiformes dont l'hémicyclide se compose, le fuseau sphérique qui en est la projection sur la sphère d'égal diamètre.*

Soit en effet $F(r, \varphi) = 0$, l'équation de la courbe plane donnée, rapportée au point O comme pôle et à la direction OA comme axe polaire. Pour préciser davantage, prenons sur cette courbe la branche définie par la détermination de r suivante :

$$r = f(\varphi).$$

Si l'on désigne par ρ un rayon vecteur On de l'hémicyclide et par θ, l'angle que ce rayon fait avec OZ, on aura pour équation du demi-cercle générateur : $\rho = r\cos\theta$ et, par conséquent, pour celle de l'hémicyclide produite

$$\rho = f(\varphi)\cos\theta,$$

θ variant, dans les deux formules, de zéro à $\frac{\pi}{2}$.

Cela étant, posons $u = \rho\sin\theta$. L'aire de la portion de surface transformée par *sphéricisation* qui correspond à l'angle $AOm = \varphi$ sera

$$(11) \qquad \mathrm{A}_\sigma = 2\int_0^\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,du}{\cos 2\theta};$$

et comme $\sin 2\theta = \frac{2u}{r}$, il vient

$$\mathrm{A}_\sigma = 2\int_0^\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,du}{\sqrt{1 - \frac{4u^2}{r^2}}}.$$

Mais

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{1 - \frac{4u^2}{r^2}}} = -\frac{r^2}{4}\sqrt{1 - \frac{4u^2}{r^2}} + C;$$

donc, à la limite,

$$\mathrm{A}_\sigma = \frac{1}{2}\int_0^\Phi r^2\,d\varphi = \mathrm{A}_\varpi,$$

en représentant par A_ϖ l'aire plane du secteur AOB, d'angle Φ, qui a servi à construire l'hémicyclide. C. Q. F. D.

44. Quant à l'aire exacte de l'hémicyclide, si l'on représente par γ l'angle que fait, avec le plan des XY, le plan tangent mené par un quelconque n de ses points, on aura sous deux formes différentes :

$$\mathrm{A} = 2\int_0^\varphi d\varphi \int_0^{\frac{r}{2}} \frac{u\,du}{\cos\gamma} = \int_0^\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\theta\sqrt{du^2 + u^2\,d\varphi^2}.$$

Comme vérification, il faut que si l'on pose, sous le radical, $du = 0$, A redevienne A_σ. C'est ce qui a lieu en effet, car la quantité à intégrer étant alors égale à $r\,d\theta . u\,d\varphi$, de $\sin 2\theta = \frac{2u}{r}$ on tire $r\,d\theta = \frac{du}{\cos 2\theta}$. Et comme en passant de la variable θ à la variable u, il faut doubler l'intégrale, on retrouve bien de la sorte l'expression de A_σ ci-dessus.

45. THÉORÈME II. — *La portion de volume du cylindre droit circonscrit à l'hémicyclide comprise entre cette dernière surface et sa projection sur le plan tangent est exactement le quart de l'onglet correspondant si on limite le cylindre à la courbe de contact. Il en est la moitié si on n'arrête le cylindre qu'au conoïde que forment les tangentes horizontales de l'hémicyclide.*

En effet, le volume de l'onglet, d'angle φ, de l'hémicyclide a pour expression

$$(12) \qquad V = \frac{1}{3}\int_0^\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos^3\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{12}\int_0^\varphi r^3\, d\varphi .$$

D'autre part, celui du cylindre circonscrit limité à la courbe de contact, comme au n° 41, est

$$U = \int_0^\varphi d\varphi \int_0^{\frac{r}{2}} Z\,u\,du ,$$

avec la condition

$$u^2 = Z(r - Z).$$

Substituant dans la valeur de U la plus petite racine de cette équation en Z, il vient, en intégrant,

$$U = \frac{1}{48}\int_0^\varphi r^3\, d\varphi = \frac{1}{4} V.$$

Doublant ce résultat, à cause de la symétrie des éléments partiels de volume par rapport à la courbe de contact, on aura pour le volume total du cylindre extérieur à l'onglet et arrêté au conoïde, $\frac{1}{2}V$; C. Q. F. D.

46. THÉORÈME III. — *La transformée par rayons vecteurs réciproques de toute hémicyclide est un conoïde parallèle à celui que forment ses tangentes horizontales.*

On le démontre sans peine en remarquant que l'inverse d'une circonférence qui passe par le pôle d'inversion est une droite.

Nous aurons occasion dans ce qui va suivre de faire diverses applications de ces trois théorèmes.

V.

Lieux géométriques complémentaires relatifs à la courbure de la surface auxiliaire F_m.

47. I. — Comme complément à la théorie exposée, proposons-nous d'étudier, d'abord, le lieu des centres de courbure de toutes les sections normales ou obliques que l'on peut faire autour d'un point quelconque M pris sur la surface auxiliaire F_m.

Ce lieu est une hémicyclide. En effet, supposons qu'au lieu de rabattre sur le plan des XY (nº 36) les inverses des rayons de courbure des sections normales de la surface F_m, nous rabattions ces rayons eux-mêmes; nous aurons les trois courbes

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'},$$

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{R} - \frac{\sin^2\varphi}{R'},$$

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{R},$$

rapportées aux coordonnées polaires ρ et φ. Or, si l'on construit les hémicyclides correspondantes, on aura précisément les trois variétés du lieu général qu'il s'agit d'étudier.

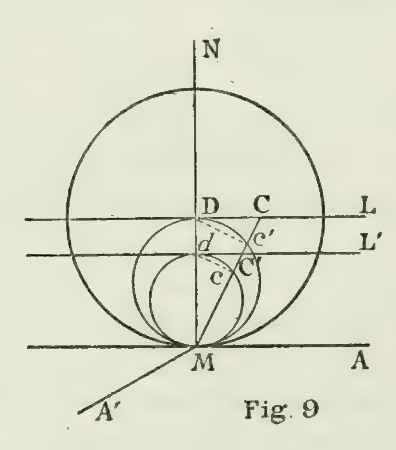


Fig. 9

Soit donc c' le centre de courbure qui correspond à la section oblique faite dans la surface F_m par le plan CMA'. Ce point est, d'a-

près le théorème de MEUNIER, situé sur la circonférence dont MD ou ρ est le diamètre et qui a pour équation, en coordonnées polaires,

$$\rho' = \rho \cos\theta.$$

On obtiendra l'équation de l'hémicyclide cherchée en substituant à ρ sa valeur, ce qui donne, sous deux formes équivalentes, et dans ses trois variétés :

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho' &= \frac{RR'\cos\theta}{R'\cos^2\varphi + R\sin^2\varphi},\\ \rho' &= \frac{RR'\cos\theta}{R^2\cos^2\varphi - R\sin^2\varphi},\\ \rho' &= \frac{R\cos\theta}{\cos^2\varphi}. \end{aligned}\right.$$

$$(13')\qquad \left\{\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= \frac{RR'(X^2+Y^2)Z}{R'X^2 + RY^2},\\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= \frac{RR'(X^2+Y^2)Z}{R'X^2 - RY^2},\\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= \frac{R(X^2+Y^2)Z}{X^2}. \end{aligned}\right.$$

La première de ces surfaces Σ' est une surface fermée qui affecte sensiblement la même forme que la première des surfaces Σ (n° 38). Quant aux deux autres, elles sont composées de nappes qui s'étendent à l'infini dans la direction de leurs plans asymptotiques respectifs, savoir : $\operatorname{tg}\varphi_1 = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}$, pour la seconde, et $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ pour la troisième. Ajoutons que ces nappes sont situées de part et d'autre du plan tangent en M dans le premier cas, et d'un même côté dans le second.

Aux surfaces Σ' se rattachent d'autres surfaces Σ'' qui leur sont homothétiques et qu'on pourrait qualifier de *surfaces de courbure* parce qu'elles sont les lieux géométriques des *cercles* de courbure de toutes les sections normales faites au point M. Il suffira donc que nous nous occupions des surfaces Σ'.

48. 1° En appliquant à la première d'entr'elles (13) la formule générale (11), on trouve

$$A'_{\sigma_1} = \pi\frac{R+R'}{2}\sqrt{RR'}.$$

Ainsi l'aire cherchée est égale à celle d'une ellipse dont les demi-axes

sont la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique des rayons principaux.

Quant au volume correspondant, la formule (12) nous donne

$$V'_1 = \frac{\pi}{48}(3R^2 + 2RR' + 3R'^2)\sqrt{RR'}.$$

Lorsque $R = R'$, on obtient le volume de la sphère dont MD est le diamètre, résultat facile à prévoir.

2° Passons à la seconde des surfaces Σ'. Comme elle devient infinie pour $\varphi = \varphi_1$, il n'y a lieu que d'en calculer un fuseau ou un onglet correspondant à une valeur de φ inférieure à φ_1.

Pour l'aire de la surface (transformée), on trouve

$$8A'_{\sigma_2} = \frac{RR'(R+R')\sin 2\varphi}{R'\cos^2\varphi - R\sin^2\varphi} - (R'-R)\sqrt{RR'}\log\left(\frac{R'\cos\varphi + R\sin\varphi}{R'\cos\varphi - R\sin\varphi}\right).$$

Le cas de $R = R'$ pour lequel F_m devient une surface *minima* est particulièrement intéressant. On constate d'abord que la limite du dernier terme de A'_{σ_2} est nulle, et il vient alors

$$A'_{\sigma_2} = \frac{R^2}{4}\operatorname{tg} 2\varphi.$$

Ceci fait voir que l'aire totale de la surface considérée est la même que celle de la bande du plan tangent comprise entre deux parallèles distantes, de part et d'autre du point M, de la longueur R.

Pour le volume de l'onglet correspondant, si l'on pose

$$P' = [R'(5R - 3R')\cos^2\varphi + R(5R' - 3R)\sin^2\varphi]\frac{RR'(R+R')\sin 2\varphi}{(R'\cos^2\varphi - R\sin^2\varphi)^2},$$

$$Q' = (3R^2 - 2RR' + 3R'^2)\sqrt{RR'}\log\left(\frac{R'\cos\varphi + R\sin\varphi}{R'\cos\varphi - R\sin\varphi}\right),$$

on aura

$$V'_2 = \frac{1}{192}(P' + Q').$$

Lorsque $R = R'$,

$$V'_2 = \frac{R^3}{48}\left[\frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\cos 2\varphi} + \log\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

ainsi qu'on peut le vérifier directement.

3° Enfin la troisième des surfaces Σ' acquiert, elle aussi, une aire et un volume infinis pour $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; mais pour $\varphi < \varphi_1$, on trouve

$$A'_{\tau_3} = \frac{R^2 \operatorname{tg} \varphi}{6}\left(2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right),$$

$$V'_3 = \frac{R^3 \operatorname{tg} \varphi}{180}\left(8 + \frac{4}{\cos^2 \varphi} + \frac{3}{\cos^4 \varphi}\right).$$

49. II. Transformées conoïdales. — D'après le théorème III du n° 46, toute transformée par rayons vecteurs réciproques d'une hémicyclide est un conoïde à génératrices horizontales. Cherchons l'équation de ce conoïde, d'abord, pour les surfaces Σ', puis, pour les surfaces Σ.

α. Considérons la première, par exemple, des surfaces Σ' ou (13'). Puisqu'on a $MC'.Mc' = 1$, sa transformée est le conoïde

$$Z = \frac{R' X^2 + R Y^2}{R R'(X^2 + Y^2)}, \tag{14}$$

que forment les tangentes horizontales de la première des surfaces Σ, le module de la transformation étant l'unité.

Si ce module devient égal à RR', on obtient le conoïde

$$Z = \frac{R' X^2 + R Y^2}{X^2 + Y^2}, \tag{14'}$$

que nous retrouverons dans la suite à propos des pinceaux de normales.

Dans ce dernier cas, l'intersection des deux surfaces appartient à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = RR',$$

et sa projection sur le plan horizontal est la courbe

$$r^2 = (R' - R)(R \sin^4 \varphi - R' \cos^4 \varphi).$$

β. Remontons aux surfaces Σ ou (10). Comme on a $MC.Mc = 1$, la transformée de la première est le conoïde

$$Z = \frac{RR'(X^2 + Y^2)}{R' X^2 + R Y^2},$$

lieu des tangentes horizontales de la première des surfaces Σ', la constante étant égale à l'unité. On voit qu'il ne diffère du conoïde (14) que par le changement de Z en $\frac{1}{Z}$.

En particulier, si la constante est $\frac{1}{RR'}$, le conoïde devient

$$Z = \frac{X^2 + Y^2}{R' X^2 + R Y^2}.$$

Ici l'intersection des surfaces a lieu sur la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{RR'},$$

et sa projection sur le plan horizontal est la courbe

$$r^2 = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \frac{R \sin^4 \varphi - R' \cos^4 \varphi}{(R \sin^2 \varphi + R' \cos^2 \varphi)^2}.$$

Des considérations du même genre seraient applicables à la déviatrice (8), mais sans utilité, au point de vue du moins de la courbure des pseudo-surfaces ou des surfaces.

Chapitre II.

PROPRIÉTÉS AUTOUR D'UN AXE.

I.

Théorie des pinceaux de pseudo-normales.

50. I. Formules auxiliaires. — Les équations (I, 49) nous font connaître les sinus des angles ω et ω' que fait avec MX et MY la direction ME' pseudo-conjuguée de MA. Résolvons ces équations par rapport à $\sin\varphi$ et à $\sin\varphi'$; nous aurons

$$(15)\qquad \begin{cases} K''\rho_\varepsilon \sin\varphi = p\sin\omega - q\sin\omega' = U, \\ K''\rho_\varepsilon \sin\varphi' = -p'\sin\omega + q'\sin\omega' = U', \end{cases}$$

en se souvenant (n° 10) que $K'' = pq' - qp' = \dfrac{\mathrm{K}''}{\sin^2\Phi}$.

Les cosinus de ces deux catégories d'angles en résultent facilement; on trouve (I, 21'):

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\cos\omega}{\rho_\varepsilon} = p_1\sin\varphi' + p'_1\sin\varphi = P, \\ \dfrac{\cos\omega'}{\rho_\varepsilon} = q_1\sin\varphi' + q'_1\sin\varphi = Q, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(17)\qquad \begin{cases} K''\rho_\varepsilon\cos\varphi = \dfrac{1}{\sin\Phi}(U' + U\cos\Phi), \\ K''\rho_\varepsilon\cos\varphi' = \dfrac{1}{\sin\Phi}(U + U'\cos\Phi); \end{cases}$$

d'où cette autre expression de la déviation verticale $\dfrac{1}{\rho_\varepsilon}$.

$$\frac{1}{\rho_\varepsilon^2} = \frac{K''}{U^2 + U'^2 + 2UU'\cos\Phi}.$$

51. II. Ligne de striction axiale. — Cherchons, en projection horizontale, le lieu que décrit l'extrémité K (Fig. 5) de la plus courte distance de la verticale MN à la pseudo-normale $M'N'$, lorsque celle-ci tourne autour de MN, en s'appuyant sur une courbe infinitésimale située dans le plan (tangent) horizontal.

On a d'abord géométriquement

$$d\lambda = dS \sin\psi = dS \cos(\omega - \varphi) = dS \cos(\varphi' - \omega);$$

d'où, en développant l'une ou l'autre de ces relations, à l'aide des formules ci-dessus :

$$(18) \qquad d\lambda = \frac{U\cos\omega' + U'\cos\omega}{\sqrt{U^2 + U'^2 + 2UU'\cos\Phi}}\,dS,$$

l'arc dS n'étant assujetti qu'à la condition de rester infiniment petit.

Cette formule résoud la question pour le cas très général où l'on voudrait rapporter la direction ME' du rayon vecteur MH aux deux axes obliques MX, MY. Mais il sera plus simple d'adopter ici les coordonnées polaires $d\lambda$ et ω, ce qui donne

$$(18') \quad d\lambda = \frac{p\sin^2\omega - (q + p')\sin\omega\cos\omega + q'\cos^2\omega}{\sqrt{(p\sin\omega - q\cos\omega)^2 + (p'\sin\omega - q'\cos\omega)^2}}\,dS,$$

dS étant une fonction quelconque de φ et, par conséquent, de ω.

Sous cette seconde forme, on voit clairement que $d\lambda$ s'annule *dans la direction* des trajectoires orthogonales des lignes de courbure (angulaires) de la pseudo-surface **F**, ainsi qu'on pouvait d'ailleurs le prévoir.

Nous donnerons, dans la suite, à ce lieu une forme plus simple.

52. III. Conoïde de striction axiale.—Proposons-nous maintenant de trouver le lieu des perpendiculaires communes LK à MN et à $M'N'$.

Soit Z' l'ordonnée de l'extrémité K de cette perpendiculaire. Nous partirons des relations évidentes :

$$Z' = -\frac{M'H}{d\varepsilon} = -\rho_\varepsilon\cos\psi = \frac{\rho_\varepsilon^2}{\rho''_A},$$

$\frac{1}{\rho''_A}$ désignant la courbure normale relative à la direction MA.

Exprimée au moyen des angles ω et ω' par les formules (15), cette courbure nous donne (1') pour la direction pseudo-conjuguée ME'

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{K}'' Z' \sin^2\Phi = -\,\mathrm{q}_1 \sin^2\omega' + (\mathrm{p}_1 - \mathrm{q}'_1)\sin\omega\sin\omega' \\ &\qquad\qquad + \mathrm{p}'_1\sin^2\omega = \frac{\sin^2\Phi}{\rho''_{E'}}. \end{aligned} \right.$$

Revenant aux coordonnées rectilignes par les formules de transformation connues, on en déduit

$$(19') \qquad K'' Z' = \frac{-q X'^2 + (p - q') X' Y' + p' Y'^2}{X'^2 + Y'^2 + 2 X' Y' \cos \Phi} .$$

Et comme X', Y', Z' représentent ici les coordonnées d'un point quelconque du lieu, on obtient ainsi pour solution, un *conoïde du* 3ème *degré*.

Si l'on cherche par la méthode usuelle (élémentaire) les valeurs-limites de Z', on trouvera qu'elles sont fournies par l'équation (3) ou (3′) où l'on poserait

$$(20) \qquad K'' Z' = \frac{1}{R} ,$$

à savoir, si l'on choisit la première forme, par exemple :

$$(21) \quad \begin{cases} (K'' Z')^2 \sin^2 \Phi + [q_1 - p'_1 + (p_1 - q'_1) \cos \Phi] (K'' Z') \\ \qquad - \left[q_1 p'_1 + \frac{1}{4} (p_1 - q'_1)^2 \right] = 0 . \end{cases}$$

Au lieu de cette équation qui est celle aux carrés des inverses des demi-axes de l'indicatrice (3), KUMMER, dans sa *Théorie générale des systèmes rectilignes* en donne une autre qui, bien que équivalente à la précédente, est moins simple, vû qu'elle renferme comme éléments surabondants, d'abord, les coefficients E, F, G de GAUSS, voire, les déviations verticales $\frac{1}{\rho_{\varepsilon,s}}$, $\frac{1}{\rho_{\varepsilon,s'}}$ des lignes coordonnées.

Lorsque $\Phi = \frac{\pi}{2}$ et qu'en outre les plans coordonnés sont des plans *principaux*, la somme $p_1 - q'_1$ ou $\frac{1}{M_Z} + \frac{1}{N'_Z}$ est nulle sans que chaque terme le soit ; on a donc

$$(22) \qquad K'' Z' = \frac{\cos^2 \omega}{R} + \frac{\sin^2 \omega}{R'} = \frac{1}{\rho''_{E'}} .$$

C'est le cas général des pseudo-surfaces. Pour les surfaces, l'équation se réduit à

$$(22') \qquad Z' = R' \cos^2 \omega + R \sin^2 \omega = \frac{R' X'^2 + R Y'^2}{X'^2 + Y'^2} ,$$

ce qui, justement, nous ramène au conoïde (14′) du n° 49.

53. III. SURFACE D'UN PINCEAU CIRCUMAXIAL DE PSEUDO-NORMALES. — Ce lieu géométrique étant la surface réglée que décrit $M'N'$ au-

tour de MN (n° 51), nous chercherons d'abord l'équation du *cône directeur* du pinceau.

A cet effet, si l'on se reporte à la *Fig.* 5, on y voit que MN'_1, parallèle à $M'N'$, est la génératrice de ce cône, correspondante à l'arc MM' ou dS. Or MN'_1, se projette suivant ME ou son prolongement. Si donc on désigne, pour un instant, par ω_0, ω'_0 les angles $\psi - \varphi$ et $\psi + \varphi$ (n° 15) que fait ME avec MX et MY, on aura $\omega_0 = \omega - \frac{\pi}{2}$ et $\omega'_0 = \omega' + \frac{\pi}{2}$; donc, d'après (16),

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\sin\omega_0}{\rho_\varepsilon} &= p_1 \sin\varphi' + p'_1 \sin\varphi = P, \\ \frac{\sin\omega'_0}{\rho_\varepsilon} &= q_1 \sin\varphi' + q'_1 \sin\varphi = Q. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, du point M comme centre et dans le plan de l'angle de contingence NMN'_1 ou $d\varepsilon$, décrivons avec un rayon arbitraire ζ, un arc de cercle. Cet arc aura pour mesure $\zeta\, d\varepsilon$ ou $\zeta \frac{dS}{\rho_\varepsilon}$ et se projettera en vraie grandeur (aux infiniment petits du 2ème ordre près) sur ME ou son prolongement. Il en résulte que si l'on représente par $d\xi$, $d\eta$, ζ les coordonnées courantes de la génératrice $M'N'$, ses équations seront

$$(24) \qquad \frac{d\xi}{\sin\omega'_0} = \frac{d\eta}{\sin\omega_0} = \frac{\zeta}{\rho_\varepsilon}\,\frac{dS}{\sin\Phi}.$$

Or, d'après (23), ceci revient à

$$(24') \qquad \frac{d\xi}{q_1 \sin\varphi' + q'_1 \sin\varphi} = \frac{d\eta}{-p_1 \sin\varphi' - p' \sin\varphi} = \zeta \frac{dS}{\sin\Phi},$$

ou, plus simplement, à

$$(24'') \qquad \frac{d\xi}{q_1\, ds + q'_1\, ds'} = \frac{d\eta}{-p_1\, ds - p'_1\, ds'} = \zeta.$$

Il n'y a plus qu'à tirer de là les valeurs de ds et ds' et à les substituer dans l'équation $F_0(ds, ds') = 0$ de la directrice plane donnée. On obtiendra de la sorte une équation *homogène* en $d\xi$, $d\eta$, ζ qui sera celle du cône directeur cherché.

Soit, comme exemple, le cercle infinitésimal

$$F_0 = ds^2 + ds'^2 + 2\, ds\, ds' \cos\Phi - dS^2 = 0.$$

A l'aide des substitutions indiquées, on en déduira sans peine le cône

du second ordre

$$(25)\quad \begin{cases} (p_1 d\xi + q_1 d\eta)^2 + (p'_1 d\xi + q'_1 d\eta)^2 \\ \qquad - 2(p_1 d\xi + q_1 d\eta)(p'_1 d\xi + q'_1 d\eta)\cos\Phi = (p_1 q'_1 - q_1 p'_1)\zeta^2 dS^2. \end{cases}$$

Entr'autres remarques, on peut vérifier que si l'on prend pour dS une valeur bien déterminée et qu'on coupe le cône par le plan $\zeta = 1$, le rapport de l'aire de la section produite à celle du cercle lui-même sera égal à $p_1 q'_1 - q_1 p'_1$, c'est-à-dire à K''.

Occupons-nous, en second lieu, du pinceau proprement dit. En ayant égard aux formules (24''), on peut écrire immédiatement les équations de sa génératrice $M'N'$, savoir :

$$(26)\qquad \frac{d\xi - ds}{q_1 ds + q'_1 ds'} = \frac{d\eta - ds'}{-p_1 ds - p'_1 ds'} = \zeta.$$

Que si, pour abréger, on pose

$$(27)\qquad \Delta_1 = (p_1 q'_1 - q_1 p'_1)\zeta^2 + (q_1 - p'_1)\zeta + 1,$$

elles deviendront

$$(28)\qquad \begin{cases} \Delta_1 ds = (1 - p'_1\zeta)d\xi - q'_1\zeta d\eta, \\ \Delta_1 ds' = p_1\zeta d\xi + (1 + q_1\zeta)d\eta. \end{cases}$$

Il reste à porter ces trois dernières expressions dans l'équation $F_0(ds, ds') = 0$ de la directrice donnée, pour avoir, dans chaque cas, la surface du pinceau correspondant.

Remarquons qu'en s'annulant, le déterminant Δ_1 donne les foyers *optiques,* réels ou imaginaires, du rayon axial MN. On a vu en effet (n° 28) que ces foyers résultent de l'équation en $\frac{1}{F}$ ou $\frac{1}{\rho''}$ suivante :

$$\frac{1}{\rho''^2} + (q_1 - p'_1)\frac{1}{\rho''} + (p_1 q'_1 - q_1 p'_1) = 0.$$

Soient δ_1, δ'_1 les deux distances *focales* (à l'origine) que les racines de cette équation ou plutôt celles de son inverse déterminent. On pourra écrire très élégamment :

$$(27')\qquad \Delta_1 = \left(1 - \frac{\zeta}{\delta_1}\right)\left(1 - \frac{\zeta}{\delta'_1}\right).$$

Nous reviendrons bientôt sur ce dernier résultat.

54. Parmi les propriétés dont jouissent les pinceaux de pseudo-normales, pinceaux que nous pouvons désormais qualifier de *pinceaux optiques,* nous signalerons celle-ci, à savoir : que le rapport de l'aire de

leurs sections horizontales à celle de la directrice plane est toujours égal à Δ_1. Ajoutons tout-de-suite que, bien que fort remarquable, cette propriété n'est qu'un cas particulier de celle que nous établirons bientôt en terminant ce paragraphe. Donnons-en toutefois un exemple :

Si l'on suppose que la directrice infinitésimale soit le cercle

$$F_0 = ds^2 + ds'^2 - dS^2 = 0,$$

lequel implique $\Phi = \frac{\pi}{2}$, la surface du pinceau correspondant sera

$$(29)\quad \begin{cases} [p\zeta d\xi + (1 + q\zeta) d\eta]^2 \\ \quad + [(1 - p'\zeta) d\xi - q'\zeta d\eta]^2 = [(pq' - qp')\zeta^2 + (q - p')\zeta + 1] dS^2. \end{cases}$$

Or, on constate aisément qu'entre l'aire A_ζ de l'ellipse de section par le plan $Z = \zeta$ et celle A_0 du cercle de rayon dS, on a bien

$$\frac{A_\zeta}{A_0} = (pq' - qp')\zeta^2 + (q - p')\zeta + 1 = \Delta_1.$$

Quant au cône directeur correspondant, il est ici

$$(p\,d\xi + q\,d\eta)^2 + (p'd\xi + q'd\eta)^2 = (pq' - qp')\zeta^2 dS^2.$$

Si l'on désigne par a_ζ l'aire de la section qu'y produit le même plan horizontal $Z = \zeta$, on aura $\frac{a_\zeta}{A_0} = K''\zeta^2$; et pour $\zeta = 1$, ce rapport se réduira à K'', conformément à ce qui a été démontré plus haut.

55. V. Mode particulier de génération des pinceaux de pseudo-normales. — On peut se demander, guidé en cela par l'analogie avec ce qui a lieu dans le cas des surfaces (Sturm), si un pinceau de pseudo-normales ou optique est susceptible d'être engendré par le mouvement d'une droite s'appuyant, d'une part, sur une courbe infinitésimale plane et, d'autre part, sur deux droites *obliques* entr'elles (et non plus rectangulaires) en même temps que parallèles au plan de la courbe.

Pour le reconnaître, nous nous reporterons aux formules (31) du n° 15. En se souvenant que $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \mu$, on peut les écrire ainsi :

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\zeta_1} = \dfrac{p_1}{\mu} + p'_1, \\[2ex] -\dfrac{1}{\zeta'_1} = q_1 + q'_1\mu. \end{cases}$$

Si l'on y fait $\Phi = \frac{\pi}{2}$ avec $p_1 = q'_1 = 0$, hypothèses qui entraînent

alors $p = q' = 0$, on se trouve dans le cas de vraies normales appartenant à une surface (n° 33) normales qui, dans le voisinage du point M, s'appuyent, comme nous le rappelions tout-à-l'heure, sur deux droites rectangulaires ou *directrices rectilignes,* individuellement parallèles aux tangentes des sections principales. (*Voir*: Note finale).

Mais dans le cas général des pseudo-surfaces, p_1 et q'_1 ou p et q' n'étant pas nuls, les segments ζ_1, ζ'_1 ne peuvent devenir simultanément constants, comme l'analogie des propriétés l'exige, que de deux manières: ou bien, parce que μ et $\frac{1}{\mu}$ sont eux-mêmes constants, ou bien parce que les coefficients de ces quantités sont nuls.

1° Si μ est constant, le pied de la pseudo-normale $M'N'$ parcourt l'élément fixe MM' ou dS, et le lieu de cette génératrice doit, *a priori,* être un paraboloïde hyperbolique.

Effectivement, les équations de $M'N'$ pouvant s'écrire, dans le cas le plus général:

$$d\xi = \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) ds,$$

$$d\eta = \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta'_1}\right) ds',$$

on en déduit, pour le cas présent, le paraboloïde hyperbolique:

$$(31) \qquad \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta'_1}\right) d\eta = \mu \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) d\xi.$$

2° Si les coefficients de μ et de $\frac{1}{\mu}$, dans l'équation (30), sont nuls (sans que Φ soit droit), c'est que l'on a

$$(32) \qquad p_1 = 0, \qquad q'_1 = 0,$$

ou bien

$$(32') \qquad p + q\cos\Phi = 0, \qquad q' + p'\cos\Phi = 0,$$

ce qui entraîne, en même temps que $\zeta_1 = \frac{1}{p'_1}$ et $\zeta'_1 = -\frac{1}{q_1}$, les relations suivantes:

$$ds = \frac{d\xi}{1 + q_1\zeta}, \qquad ds' = \frac{d\eta}{1 - p'_1\zeta},$$

$$\Delta_1 = (1 - p'_1\zeta)(1 + q_1\zeta),$$

et l'on remarque en outre qu'actuellement ζ_1 et ζ'_1 coïncident avec δ'_1 et δ_1 (27').

De là on conclut que, dans le cas qui nous occupe, tout au moins,

le lieu est produit par le mouvement d'une droite s'appuyant sur la directrice curviligne donnée et sur les droites ($X = 0$, $Z = \delta'_1$) et ($Y = 0$, $Z = \delta_1$) respectivement situées dans les plans coordonnés. Or il est aisé de voir que ces derniers plans ne sont autres que les plans dits *focaux*. En effet, l'équation de ceux-ci, qui ne diffère, on le sait, de celle des lignes de courbure de **F** que par les coordonnées courantes, à savoir:

$$p_1 X^2 + (q_1 + p'_1) XY + q'_1 Y^2 = 0, \tag{33}$$

se réduira, on le voit, à $XY = 0$, quand les conditions $p_1 = q'_1 = 0$ sont satisfaites.

Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que les pinceaux de pseudo-normales à plans focaux *réels*, ou bien, à foyers optiques réels, sont *physiquement* les seuls véritables pinceaux optiques. Toutefois, par raison de continuité, nous conviendrons d'appliquer ce qualificatif à tous les pinceaux de pseudo-normales, indistinctement, et cela, afin de les discerner en bloc, pour-ainsi-dire, de certains autres pinceaux de droites que nous avons signalés ailleurs sous les noms de pinceaux anoptiques ou dioptiques, à propos de l'étude que nous y avons faite sur les *faisceaux* de même dénomination *).

56. Venons enfin au théorème annoncé au n° 54.

Théorème. — *Les axes des coordonnées étant supposés quelconques, soient*

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}_0\left(\frac{\mathrm{MX}+\mathrm{NY}}{\mathrm{D}}, \ \frac{\mathrm{RX}+\mathrm{SY}}{\mathrm{D}}\right) = 0, \\ &F_0\left(\frac{MX+NY}{D}, \ \frac{RX+SY}{D}\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{34}$$

les équations de deux surfaces dans lesquelles

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{N} \\ \mathrm{R} & \mathrm{S} \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} M & N \\ R & S \end{vmatrix},$$

et où les coefficients M, N, ... M, N, ... *sont des fonctions de* Z *telles que, pour* $Z = 0$, *on ait les valeurs correspondantes :*

$$\mathrm{M}_0 = \mathrm{S}_0 = \mathrm{D}_0 = 1, \qquad \mathrm{N}_0 = \mathrm{R}_0 = 0,$$
$$M_0 = S_0 = D_0 = 1, \qquad N_0 = R_0 = 0.$$

---

*) *Voir*: Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. V (4ème série).

Si l'on admet en outre que les directrices planes $\mathrm{F}_0(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$, $F_0(X, Y) = 0$, *soient des courbes fermées à aires égales* A_0 *et* A_0, *le rapport des aires des sections faites dans les deux surfaces précédentes par un même plan parallèle à celui des* XY *sera égal à* $\frac{\mathrm{D}}{D}$.

Coupons en effet la première surface par le plan $Z = \zeta$ et désignons, pour un moment, par ξ', η' les coordonnées d'un point quelconque de la section produite. La différentielle de l'aire de cette section aura pour valeur

$$d\,\mathrm{A}_\zeta = \frac{1}{2}(\xi'\,d\eta' - \eta'\,d\xi')\sin\Phi.$$

Or, à cause des relations

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{M}\xi' + \mathrm{N}\eta'}{\mathrm{D}}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{R}\xi' + \mathrm{S}\eta'}{\mathrm{D}},$$

ceci revient à

$$d\,\mathrm{A}_\zeta = \frac{1}{2}\mathrm{D}(\mathrm{X}\,d\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\,d\mathrm{X})\sin\Phi = \mathrm{D}\,d\,\mathrm{A}_0.$$

On en conclut, en supposant la constante nulle :

$$\frac{\mathrm{A}_\zeta}{\mathrm{A}_0} = \mathrm{D}.$$

Mais la seconde surface donnerait, à son tour,

$$\frac{A_\zeta}{A_0} = D,$$

et puisque, par hypothèse $\mathrm{A}_0 = A_0$, on a donc

$$\frac{\mathrm{A}_\zeta}{A_\zeta} = \frac{\mathrm{D}}{D}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — Soient m, n, r, s, *m*, *n*; *r*, *s*, les termes qu'il faut prendre dans les fonctions de Z correspondantes pour constituer les cônes des directions asymptotiques, ces termes étant, comme on le sait, ceux du degré le plus élevé lorsqu'il s'agit de fonctions algébriques. Si l'on pose

$$(34')\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}_0\left(\frac{\mathrm{m}\,\mathrm{X} + \mathrm{n}\,\mathrm{Y}}{\mathrm{d}}, \ \frac{\mathrm{r}\,\mathrm{X} + \mathrm{s}\,\mathrm{Y}}{\mathrm{d}}\right) = 0, \\ &F_0\left(\frac{m X + n Y}{d}, \ \frac{r X + s Y}{d}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

pour les équations de ces cônes conjointement avec

$$\mathrm{d} = \begin{vmatrix} \mathrm{m} & \mathrm{n} \\ \mathrm{r} & \mathrm{s} \end{vmatrix}, \qquad d = \begin{vmatrix} m & n \\ r & s \end{vmatrix},$$

il suit de la démonstration précédente que le rapport des aires des sections produites dans chacun par le plan $Z = \zeta$ est égal à $\frac{\mathrm{d}}{d}$.

Comme cas particulier du théorème ci-dessus, supposons que les équations (34) prennent la forme

$$\mathrm{F}_0\left(\frac{X}{1-\frac{Z}{\delta_\alpha}}, \quad \frac{Y}{1-\frac{Z}{\delta_\beta}}\right) = 0,$$

. . . .

Elles représenteront deux surfaces *réglées* produites par le mouvement de deux droites s'appuyant respectivement sur les directrices planes F_0 et F_0, et sur deux parallèles au plan commun de ces courbes. Or tous les pinceaux de pseudo-normales à foyers réels rentrent dans ce dernier type; le théorème général précédent leur est donc applicable.

57. Nous terminerons par la remarque suivante.

La pseudo-normale M′N′ est une génératrice commune à trois paraboloïdes hyperboliques ayant pour l'un de leurs plans directeurs le plan des XY. Le premier de ces paraboloïdes (31), qui contient l'axe des Z, a son équation à coefficients réels ou imaginaires selon que les lignes de courbure (obliques) de **F** sont réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que l'on a : $(q_1 + p_1')^2 - 4p_1 q_1' \gtrless 0$.

Quant aux deux autres paraboloïdes qui passent respectivement par les horizontales ($d\xi = ds$, $\zeta = 0$) et ($d\eta = 0$, $\zeta = 0$), ils sont toujours réels, mais dégénèrent en couples de plans sécants quand les lignes de courbure sont réelles.

II.

Application de la théorie précédente au pseudo-plan et à la pseudo-sphère.

58. I. — Nous appelons *pseudo-plan*, une pseudo-surface telle qu'en chacun de ses points il passe, non pas deux, mais une *infinité* de *lignes asymptotiques*.

L'équation générale des lignes asymptotiques étant (n° 24)

$$q\,ds^2 - (p - q')\,ds\,ds' - p'\,ds'^2 = 0;$$

et cette équation devant, par hypothèse, se réduire à une identité, on a les trois conditions

(e) $$q = 0, \quad p - q' = 0, \quad p' = 0$$

ou bien

(e′) $$q_1 = p'_1 = q'_1 \cos\Phi = p_1 \cos\Phi.$$

De la première de ces dernières conditions (laquelle peut aussi s'écrire $q = p'$) on conclut incidemment que le pseudo-plan est une pseudo-surface *minima* (n° 33).

Ceci posé, introduisons les conditions (e′) dans les valeurs (28) de ds et de ds' et admettons que la directrice F_0 du pinceau soit le cercle

$$ds^2 + ds'^2 + 2\,ds\,ds'\cos\Phi = dS^2;$$

on trouvera pour l'équation du pinceau lui-même

$$d\xi^2 + d\eta^2 - p_1^2\zeta^2\sin^2\Phi\, dS^2 + 2\,d\xi\,d\eta\cos\Phi = dS^2.$$

C'est un hyperboloïde de révolution à une nappe dont le cône asymptote est le cône directeur du pinceau.

Pour passer du pseudo-plan au plan, il faut adjoindre aux conditions (e) ou (e′) la condition caractéristique des surfaces, à savoir : $p + q' = 0$ (n° 29); ce qui entraine $p = q' = 0$ et, conséquemment, $p'_1 = 0$.

L'hyperboloïde précédent devient alors le *cylindre de révolution*

$$d\xi^2 + d\eta^2 + 2\,d\xi\,d\eta\cos\Phi = dS^2,$$

construit sur la directrice circulaire donnée.

On voit aussi que, dans ce dernier cas, le cône directeur se réduit à l'axe du cylindre, c'est-à-dire à la verticale MN. Enfin les lignes asymptotiques ne sont autres que des semi-droites rayonnant, sur le plan horizontal, dans toutes les directions, à partir du point *M*.

59. II. — Nous appelons (sans confusion sérieuse) *pseudo-sphère*, une pseudo-surface telle qu'en chacun de ses points il passe une infinité de *lignes de courbure*.

L'équation générale des lignes de courbure étant

$$p_1\,ds^2 + (q_1 + p'_1)\,ds\,ds' + q'_1\,ds'^2 = 0,$$

et cette équation devant, par hypothèse, se réduire à une identité, on a

(e_1) $$p_1 = 0, \quad q_1 + p'_1 = 0, \quad q'_1 = 0,$$

ce qui, transformé, revient à

(e'_1) $$p = -q' = p'\cos\Phi = -q\cos\Phi.$$

Comme on en tire tout aussitôt $p + q' = 0$, c'est-à-dire la condition qui caractérise toute surface, il n'est pas nécessaire d'aller plus loin pour pouvoir affirmer que la pseudo-sphère n'existe pas *en tant que pseudo-surface*. C'est une surface, et puisque, en chacun de ses points, elle satisfait à la condition $p' = -q$ ou bien $p'_1 = -q_1$, ou encore $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}$, cette surface ne diffère pas de la sphère.

Vérifions ce résultat en formant le pinceau des pseudo-normales (devenues ici de vraies normales) correspondant à la même directrice circulaire que pour le pseudo-plan.

A cet effet, il suffit d'introduire les conditions (e_1) dans les équations (28), et il vient pour l'équation du pinceau

$$d\xi^2 + d\eta^2 - (1 + q_1\zeta)\, dS^2 + 2\, d\xi\, d\eta \cos\Phi = 0\,.$$

C'est un *cône de révolution*, ayant son sommet situé au foyer (double) optique : $\zeta = -\frac{1}{q_1} = -\frac{1}{q_1} = R$ de MN.

Le cône directeur de ce pinceau est un cône parallèle au précédent et dont le sommet est au point M. Or ce sont là des propriétés inhérentes à la sphère et à elle seulement.

III.

Étude nouvelle des foyers optiques et des plans focaux correspondants.

60. Les traces horizontales des plans focaux (optiques) ont, comme on l'a vu (33), pour équation

$$(f) \qquad p_1 X^2 + (q_1 + p'_1) X Y + q'_1 Y^2 = 0\,.$$

Ce sont les tangentes à l'origine des lignes de courbure de la pseudo-surface **F** considérée. Elles sont également inclinées sur les directions principales MA_1, MA'_1, ou, si l'on veut, sur celles des axes de l'indicatrice de cette même pseudo-surface, axes dont l'équation est :

$$\left[\tfrac{1}{2}(p_1 - q'_1) + q_1 \cos\Phi\right] X^2 + (q_1 + p'_1) XY - \left[\tfrac{1}{2}(p_1 - q'_1) - p'_1 \cos\Phi\right] Y^2 = 0.$$

En désignant par θ l'angle *aigu* des deux plans focaux, on tire facilement de l'équation (f), eu égard au n° 55 :

$$(35) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta'_1}}{p + q'}\,.$$

Les deux termes de cette fraction sont des invariants et le dénominateur, en particulier, est égal à la somme des courbures de front relatives à deux directions rectangulaires (I, 30), somme nulle, on le sait, dans le cas des surfaces.

Comme application immédiate de la formule (35), observons que si, de l'équation aux foyers optiques (n° 28) que l'on peut aussi écrire

$$\frac{\sin^2\Phi}{\rho''^2} - \left[\frac{1}{R_Z} + \frac{1}{R'_Z} - \left(\frac{1}{M_Z} + \frac{1}{N'_Z}\right)\cos\Phi\right]\frac{1}{\rho''} + \left(\frac{1}{R_Z R'_Z} - \frac{1}{M_Z N'_Z}\right) = 0,$$

on rapproche l'équation aux inverses des rayons principaux (3), on en déduira

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta'_1} = \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}, \\ &\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta'_1} = \left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mathrm{R}'}\right)\sin\theta; \end{aligned} \right.$$

et, par suite,

$$(36') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2\sin\theta}{\mathrm{R}} = \frac{1+\sin\theta}{\delta_1} - \frac{1-\sin\theta}{\delta'_1}, \\ &\frac{2\sin\theta}{\mathrm{R}'} = -\frac{1-\sin\theta}{\delta_1} + \frac{1+\sin\theta}{\delta'_1}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les relations simples qui existent entre R, R′, δ_1, δ'_1 et θ.

61. Pour pouvoir poursuivre avec facilité notre étude, il nous sera plus avantageux de prendre, pour plan des ZX et des YZ, les deux plans focaux eux-mêmes.

A cet effet, nous remarquons d'abord que, puisque, par hypothèse, l'équation (f) ci-dessus doit prendre la forme $BXY = 0$, il faut avoir $p_1 = q'_1 = 0$. Or ces conditions, déjà utilisées au n° 55, peuvent s'écrire équivalemment

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} &p_1 = 0, \quad \mathrm{p} = 0, \quad p = -q\cos\theta, \quad \mathrm{p}_1 = -\mathrm{q}_1\cos\theta, \\ &q' = 0, \quad \mathrm{q}' = 0, \quad q' = -p'\cos\theta, \quad \mathrm{q}'_1 = -\mathrm{p}'_1\cos\theta; \end{aligned} \right.$$

et elles entraînent celles-ci :

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} &q_1 = \frac{\mathrm{q}}{\sin\theta} = q\sin\theta = \mathrm{q}_1, \\ &p'_1 = \frac{\mathrm{p}'}{\sin\theta} = p'\sin\theta = \mathrm{p}'_1. \end{aligned} \right.$$

De leur ensemble résulteraient, pour la plupart de nos formules antérieures, des simplifications notables. Relevons ici, dans leur nombre, celles-là seulement qui doivent nous être utiles.

α. En convenant de désigner par ϖ et ϖ' les angles qu'une direction quelconque MA, prise dans le plan horizontal, fait avec les traces MX, MY des deux plans focaux, de manière à avoir $\varpi + \varpi' = \theta$, la première courbure de profil $\frac{1}{\rho''}$ et la première courbure de front $\frac{1}{\rho_0}$ (I, n° 13) deviendront

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin\theta}{\rho''} &= \frac{\cos\varpi}{\delta_1}\sin\varpi' + \frac{\cos\varpi'}{\delta'_1}\sin\varpi, \\ \frac{\sin\theta}{\rho_0} &= \left(\frac{1}{\delta'_1} - \frac{1}{\delta_1}\right)\sin\varpi\sin\varpi'; \end{aligned} \right.$$

ce qui généralise les formules si connues d'EULER et de BERTRAND.

β. De même, la déviation verticale $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$ prendra, entr'autres formes, la suivante :

$$(40) \qquad \frac{\sin^2\theta}{\rho_\varepsilon^2} = \frac{\sin^2\varpi'}{\delta_1^2} + \frac{\sin^2\varpi}{\delta_1'^2} + 2\frac{\sin\varpi'}{\delta_1}\frac{\sin\varpi}{\delta'_1}\cos\theta,$$

et ses composantes $\frac{1}{\rho_i}$, $\frac{1}{\rho_j}$ nous donneront (n° 17), à cause de $\zeta_1 = \delta'_1$ et $\zeta'_1 = \delta_1$,

$$(41) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos i}{\zeta_j}\sin\theta &= \frac{\cos(\varpi + i)}{\delta_1}\sin\varpi' + \frac{\cos(\varpi' - i)}{\delta'_1}\sin\varpi, \\ \frac{\sin i}{\zeta_i}\sin\theta &= \frac{\sin(\varpi + i)}{\delta_1}\sin\varpi' - \frac{\sin(\varpi' - i)}{\delta'_1}\sin\varpi. \end{aligned} \right.$$

γ. Quant aux lignes pseudo-conjuguées, d'obliquité i, leur équation (27) se transforme en cette autre

$$\frac{\cos i}{\delta'_1}ds^2 + \left[\frac{\cos(\theta + i)}{\delta_1} + \frac{\cos(\theta - i)}{\delta'_1}\right]ds\,ds' + \frac{\cos i}{\delta_i}ds'^2 = 0,$$

et ainsi de suite.

62. PROPRIÉTÉS DIVERSES. — 1° Si l'on désigne par ω et ω' (n°s 19 et 50) les angles que fait avec MX et MY, la direction ME' pseudo-conjuguée de MA, l'équation (18) de la ligne de striction axiale deviendra

$$d\lambda = \frac{(\delta'_1 - \delta_1)\cos\omega\cos\omega'}{\sqrt{\delta_1^2\cos^2\omega' + \delta_1'^2\cos^2\omega - 2\,\delta_1\delta'_1\cos\omega\cos\omega'\cos\theta}}\,dS.$$

De là cette conséquence : tandis que dS tourne autour du point M, le point η de LK, tel que $M\eta = \rho_\varepsilon$ et, par conséquent, tel que

$$L\eta = r' = \rho_\varepsilon \sin\psi = \frac{\rho_\varepsilon^2}{\rho_0}$$

(point représentatif de MANNHEIM) décrit, en projection horizontale, la courbe

$$(\eta) \qquad r' \sin\varpi = (\delta'_1 - \delta_1)\cos\omega\cos\omega',$$

et comme, d'autre part, on a aussi

$$L\eta = \frac{dS}{d\varepsilon}\sin\psi = \frac{d\lambda}{d\varepsilon},$$

on voit, par un rapprochement inattendu, que le lieu obtenu de la sorte mesure, par ses rayons vecteurs successifs et sur le plan précité, la variation du *paramètre de distribution* des plans centraux des *pseudo-normalies* $MNM'N'$.

2° Quant au point $\varkappa$ de LK, à partir duquel on aperçoit constamment le *segment focal* $\delta'_1 - \delta_1$ sous un angle droit, on trouve, à l'aide des relations :

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} r'^2 &= (\delta'_1 - Z')(Z' - \delta_1), \\ Z' \sin\theta &= \delta_1 \sin\omega\cos\omega' + \delta'_1 \sin\omega'\cos\omega, \end{aligned} \right.$$

dont la seconde n'est que la formule (19) transformée, on trouve, dis-je, que le lieu que ce point décrit en projection sur le plan horizontal est la courbe

$$(\varkappa) \qquad r'^2 \sin\theta = \frac{1}{4}(\delta'_1 - \delta_1)^2 \sin 2\omega \sin 2\omega'.$$

3° Si l'on cherche, au moyen de la seconde des formules (41), le conoïde que décrit l'horizontale $l_i k_i$ (Fig. 5) durant la rotation de l'arc dS autour de M, on reconnait qu'il a pour équation

$$(\chi) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta}{Z} &= \frac{X^2}{\delta'_1} \\ &+ \left[\frac{\sin(\theta + i)}{\sin i}\,\frac{1}{\delta_1} - \frac{\sin(\theta - i)}{\sin i}\,\frac{1}{\delta'_1}\right] XY + \frac{Y^2}{\delta_1}. \end{aligned} \right.$$

Le conoïde que décrit l'horizontale $l_j k_j$ peut se déduire de ce dernier en y changeant i en $i - \frac{\pi}{2}$.

63. FORMULE D'HAMILTON. — Reprenons la valeur de Z' écrite plus

haut. En annulant sa dérivée, on est conduit à résoudre l'équation

$$\cos(\omega - \omega') = 0 .$$

Cette équation fournit un maximum Z'_μ, correspondant à la direction $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$ et un minimum Z'_ν, correspondant à la direction $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$. Donc ces valeurs-limites ont lieu dans les plans principaux NMA_1, NMA'_1; ce qu'on savait déjà par l'équation (21).

Au surplus, ces valeurs maxima et minima, déduites de la valeur générale de Z', vérifient le système connu

$$(43)\qquad \begin{cases} Z'_\mu + Z'_\nu = \delta_1 + \delta'_1 , \\ Z'_\mu - Z'_\nu = \dfrac{\delta'_1 - \delta_1}{\sin\theta} . \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, remontons à l'équation (22) du n° 52.

De ce que l'invariant primitif K″ relatif aux plans principaux peut être remplacé par l'invariant $\frac{1}{\delta_1 \delta'_1}$ relatif aux plans focaux, cette équation nous donne immédiatement, pour $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$:

$$(44)\qquad Z'_\mu = \frac{\delta_1 \delta'_1}{\mathbf{R}} , \qquad Z'_\nu = \frac{\delta_1 \delta'_1}{\mathbf{R}} .$$

Ces valeurs sont plus simples que celles qu'on tire directement du système (43). On les obtiendrait toutefois en associant à ce dernier le système (36′), où l'on aura fait $R = \mathbf{R}$, $R' = \mathbf{R}'$.

Cela étant, revenons à la valeur générale de Z' ou (42). Eu égard à (44), elle nous donne à présent

$$Z' = Z'_\mu \cos^2\left[\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] + Z'_\nu \sin^2\left[\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right],$$

ce qu'on peut écrire plus simplement ainsi

$$Z' = Z'_\mu \cos^2 \omega_1 + Z'_\nu \sin^2 \omega_1 ,$$

le nouvel angle polaire ω_1 étant compté à partir du premier plan principal NMA_1. C'est la formule d'Hamilton.

Il résulte de tout ce qui précède qu'on peut former le Tableau, non encore signalé, croyons-nous, des relations suivantes :

$$\frac{1}{\delta_1 \delta'_1} = \frac{1}{\mathbf{R} Z'_\mu} = \frac{1}{\mathbf{R} Z'_\nu} = \frac{1}{\rho'' Z'} = \mathrm{K}'' .$$

64. Formule de Kummer. Son extension. — Considérons les

deux plans normaux NMA_i et NMA_j dont il a été question au n° 17. Ces plans interceptent sur la pseudo-normale $M'N'$ (Fig. 5) un segment $k_i k_j$ dont la projection sur MN est $l_i l_j$. Soient ζ_i et ζ_j les deux segments partiels $\left(\text{le premier positif et le second négatif, tant que l'obliquité donnée } i \text{ satisfait à la condition } \omega + i > \frac{\pi}{2}\right)$, suivant lesquels le plan des XY coupe le segment total. Il s'agit d'évaluer ζ_i et ζ_j en fonction de l'angle (supposé) constant i et des valeurs maxima et minima que prennent ces deux segments partiels lorsque MM' ou dS tourne autour du point M.

C'est au fond l'étude de l'intervalle compris entre les deux conoïdes *co-segmentaires* que nous avons fait connaître dans la troisième des propriétés signalées au n° 62, qu'il s'agit d'opérer sommairement.

A cet effet, nous partirons successivement de chacune des équations (41).

1° On a d'abord, en les intervertissant :

$$\frac{\sin i}{\zeta_i}\sin\theta = \frac{\sin(\varpi + i)}{\delta_1}\sin\varpi' - \frac{\sin(\varpi' - i)}{\delta'_1}\sin\varpi.$$

Différentiant, on trouve que les valeurs-limites de $\frac{1}{\zeta_i}$ correspondent à l'équation

$$\sin(\varpi - \varpi' + i) = 0,$$

c'est-à-dire aux angles $\varpi - \varpi' + i = 0$ et $\varpi - \varpi' + i = \pi$.

Soient $\frac{1}{\zeta'_i}$ et $\frac{1}{\zeta''_i}$ le maximum et le minimum de $\frac{1}{\zeta_i}$; il vient

$$\frac{\sin i}{\zeta'_i}\sin\theta = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta + i)}{\delta_1} - \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta - i)}{\delta'_1},$$

$$\frac{\sin i}{\zeta''_i}\sin\theta = -\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\theta + i)}{\delta_1} + \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\theta - i)}{\delta'_1};$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\delta_1} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\theta - i)}{\zeta'_i} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta - i)}{\zeta''_i},$$

$$\frac{1}{\delta'_1} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\theta + i)}{\zeta'_i} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta + i)}{\zeta''_i}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de $\frac{1}{\zeta_i}$, en ayant soin de remplacer les produits et les puissancas des lignes trigonométriques par les sommes (algébriques) qui leur sont équivalentes $\left(\text{comme } \sin^2 a \text{ par } \frac{1 - \cos 2a}{2}\right)$, on trouve, après réductions :

$$\frac{1}{\zeta_i} = \frac{\cos^2\left[\varpi - \frac{1}{2}(\theta - i)\right]}{\zeta_i'} + \frac{\sin^2\left[\varpi - \frac{1}{2}(\theta - i)\right]}{\zeta_i''}.$$

Mais si l'on prend la trace MA_1 pour axe polaire, on a alors

$$\varpi = \varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\zeta_i} = \frac{\cos^2\left[\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - i\right)\right]}{\zeta_i'} + \frac{\sin^2\left[\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - i\right)\right]}{\zeta_i''}.$$

C'est la formule dite de KUMMER, sur la valeur des segments relatifs au rayon axial d'une congruence élémentaire, ou mieux, d'un pinceau de pseudo-normales.

2° Considérons maintenant la première des équations (41), savoir :

$$\frac{\cos i}{\zeta_j}\sin\theta = \frac{\cos(\varpi + i)}{\delta_1}\sin\varpi' + \frac{\cos(\varpi' - i)}{\delta_1'}\sin\varpi.$$

Ici les valeurs-limites de $\frac{1}{\zeta_j}$ dépendent de l'équation

$$\cos(\varpi - \varpi' + i) = 0,$$

et, par suite, des angles $\varpi - \varpi' + i = \pm\frac{\pi}{2}$, directions perpendiculaires à celles obtenues dans le premier cas.

En désignant par $\frac{1}{\zeta_j'}$ le minimum, et par $\frac{1}{\zeta_j''}$ le maximum de $\frac{1}{\zeta_j}$, on trouve

$$\frac{2}{\delta_1} = \frac{1 - \sin(\theta - i)}{\zeta_j'} + \frac{1 + \sin(\theta - i)}{\zeta_j''},$$

$$\frac{2}{\delta_1'} = \frac{1 + \sin(\theta + i)}{\zeta_j'} + \frac{1 - \sin(\theta + i)}{\zeta_j''};$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\zeta_j} = \frac{\cos^2\left[\varpi - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta - i\right)\right]}{\zeta'_i} + \frac{\sin^2\left[\varpi - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta - i\right)\right]}{\zeta''_i},$$

puis, finalement,

$$\frac{1}{\zeta_j} = \frac{\sin^2\left(\varphi + \frac{i}{2}\right)}{\zeta'_i} + \frac{\cos^2\left(\varphi + \frac{i}{2}\right)}{\zeta''_i}.$$

C'est la formule *complémentaire* de celle de KUMMER, non encore remarquée, semble-t-il.

65. Il ne sera pas inutile de montrer, en terminant, comment on peut parvenir aux mêmes résultats en prenant pour point de départ l'équation (31), savoir

$$\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta'_1}\right) d\eta = \mu \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) d\xi,$$

dans laquelle $\mu = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}$. Il suffit d'observer, pour le premier cas, par exemple, que $d\xi$ et $d\eta$ ne différant pas des coordonnées horizontales de l'extrémité k_i de $l_i k_i$, on doit avoir

$$\mu = \frac{ds'}{ds} = \frac{\sin\varpi}{\sin\varpi'}, \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\sin(\varpi + i)}{\sin(\varpi' - i)}.$$

Faisant après cela $\zeta = \zeta_i$, $\zeta_1 = \delta'_1$ et $\zeta'_1 = \delta_1$, à dessein de prendre pour plans coordonnés les plans focaux, on retombe sur la seconde des formules (41).

Pour le second cas, il faudra remplacer i par $i - \frac{\pi}{2}$ dans l'expression du rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$, poser $\zeta = \zeta_j$ avec $\zeta_1 = \delta'_1$ et $\zeta'_1 = \delta_1$. Alors par ces hypothèses on retrouvera la première des formules (41). Les calculs s'achèveront ensuite comme précédemment.

IV.

Cas particulier des surfaces.
Principales propriétés des pinceaux de normales.

66. Le cas des surfaces est caractérisé par ce fait que les distances focales δ_1 et δ'_1 sont égales, pour elles, aux rayons principaux R et R'. Passons en revue les plus importantes des conséquences qui en résultent.

1° On doit à Bertrand d'avoir montré, le premier, que le lieu décrit par le point H, projection sur le plan tangent de la plus courte distance LK des deux *normales* infiniment voisines NM, $M'N'$ (Fig. 5) est

$$(\lambda)\qquad d\lambda = \frac{(R'-R)\sin\omega\cos\omega}{\sqrt{R\sin^2\omega + R'\cos^2\omega}}\,dS,$$

la semi-droite ME' suivant laquelle est dirigé le rayon vecteur infinitésimal $d\lambda$ étant alors la direction *conjuguée* de MA.

A ceci on peut ajouter que le rapport de l'aire de la courbe (λ) à celle du cercle $\pi\,dS^2$ a pour expression $\frac{1}{2}\left(\frac{R'-R}{R+R'}\right)^2$.

Pour déduire cette formule (λ) de notre formule beaucoup plus générale (18'), il suffit de faire, dans cette dernière, $-q = \frac{1}{R}$, $p' = \frac{1}{R'}$ avec $p = q' = 0$.

2° Si, par analogie avec le lieu précédent, on cherche les lieux géométriques des points h_i et h_j projections horizontales de k_i et k_j, on trouvera pour le premier d'entr'eux :

$$(\lambda_i)\quad d\lambda_i = \frac{(R'-R)\sin(\omega_i - i)\cos(\omega_i - i)}{R'\sin\omega_i\cos(\omega_i - i) - R\cos\omega_i\sin(\omega_i - i)}\,dS.$$

Le second peut se déduire de ce dernier en y remplaçant i par $i - \frac{\pi}{2}$.

On vérifie en outre que la courbe (λ) se tire de la courbe (λ_i) en changeant dans celle-ci $d\lambda_i$, ω_i et $\omega_i - i$ en $d\lambda$, ω et φ, et en éliminant ensuite φ au moyen des relations

$$(\mu)\qquad \frac{\sin\varphi}{R'\cos\omega} = \frac{\cos\varphi}{-R\sin\omega} = -\frac{1}{\sqrt{R^2\sin^2\omega + R'^2\cos^2\omega}}.$$

3° Formons l'équation du lieu que décrit, en projection horizontale, le point X de LK (n° 62) à partir duquel on aperçoit le segment focal *principal* de MN sous un angle droit. On obtient la rosace à quatre branches :

$$r' = \frac{1}{2}(R'-R)\sin 2\omega.$$

C'est à quoi du reste se réduisent simultanément les deux lieux plus généraux obtenus, au n° 62, pour les pseudo-surfaces.

4° Quant au conoïde que décrit, durant la rotation de dS, l'horizontale $l_i k_i$, on trouve directement

$$(\nu)\qquad \frac{X^2+Y^2}{Z} = \frac{X^2}{R} + XY\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\cot i + \frac{Y^2}{R'}.$$

Ce conoïde peut se déduire du lieu analogue (χ) obtenu au n° cité, à condition d'y faire $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Enfin le lieu décrit par $l_j k_j$ résulte du lieu (ν) par le seul changement habituel de i en $i - \frac{\pi}{2}$.

5° On sait que, dans le cas des surfaces, le conoïde de striction des normales circumaxial de MN a pour équation (n°s 49 et 52) :

$$(\xi) \qquad Z = \frac{R'X^2 + RY^2}{X^2 + Y^2}.$$

Il ne sera pas inutile de faire voir comment on peut le déduire du conoïde (ν) lui-même. A cet effet, au lieu de supposer dans celui-ci l'obliquité i constante, rendons-la variable et égale à $\frac{\pi}{2} - \psi$. Comme on a (n° 14) :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{1}{\rho_0}}{-\frac{1}{\rho''}} = -\frac{(R' - R)XY}{R'X^2 + RY^2},$$

la substitution de cette valeur dans (ν), ainsi modifiée, fera retrouver le conoïde (ξ).

6° Signalons enfin la propriété suivante :

Si l'on cherche le volume compris entre la courbe (λ) ci-dessus et le conoïde (ξ), puis, qu'on compare ce volume à celui d'un cylindre de révolution ayant pour base le cercle de rayon dS et une hauteur égale à $\frac{RR'}{R + R'} + \frac{1}{4}(R + R')$, on reconnaîtra que le rapport de ces volumes est précisément celui que nous avons obtenu entre les aires de leurs bases, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\left(\frac{R' - R}{R + R'}\right)^2$.

NOTE COMPLÉMENTAIRE

SUR LA VARIÉTÉ DES DIRECTRICES RECTILIGNES FOCALES.

I. Retour à quelques formules. — Indépendamment de la courbure de profil $\frac{1}{\rho''}$ et de la courbure de front $\frac{1}{\rho_0}$, projections orthogonales-limites de la déviation verticale $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$, toute ligne (S) tracée sur une pseudo-surface, voire, sur une surface, admet, en chaque point, une double infinité d'autres courbures (extrinsèques) dont chaque couple $\left(\frac{1}{\rho_i}, \frac{1}{\rho_j}\right)$ provient de la projection de $\frac{1}{\rho_\varepsilon}$ sur un système de deux droites rectangulaires A_i, A_j qu'on supposerait pivoter autour du point choisi M. C'est de ces dernières composantes, variables avec *l'obliquité* i, qu'il nous faut, avant tout, reprendre l'étude. Je dis reprendre : car maintes propriétés, les concernant, ont été déjà signalées par nous en divers endroits de cet écrit. ·

Par exemple : nous avons trouvé (n° 16), entr'autres expressions de $\frac{1}{\rho_i}$ et $\frac{1}{\rho_j}$ et à la notation près :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin\Phi}{\rho_i} &= (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\sin(\varphi + i) - (q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\sin(\varphi' - i),\\ \frac{\sin\Phi}{\rho_j} &= (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\cos(\varphi + i) + (q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\cos(\varphi' - i). \end{aligned}\right.$$

A ces formules, nous croyons devoir adjoindre ici les suivantes :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_i} &= \frac{d\varepsilon_i}{dS} = \frac{\cos(\psi - i)}{\rho_\varepsilon}, \qquad \frac{1}{\tau_i} = -\frac{1}{\rho'} - \frac{di}{dS},\\ \frac{1}{\rho_j} &= \frac{d\varepsilon_j}{dS} = \frac{\sin(\psi + i)}{\rho_\varepsilon}, \qquad \frac{1}{\tau_j} = \frac{1}{\rho'} + \frac{di}{dS}, \end{aligned}\right.$$

l'angle ψ désignant toujours celui que fait en M la courbe (S) avec sa représentation sphérique.

Quant aux torsions (égales et contraires) incluses dans ce Tableau, elles ont été calculées par la même méthode que les torsions *principales* $\frac{1}{\tau_\varepsilon}$, $\frac{1}{\tau_\upsilon}$, $\frac{1}{\tau_\sigma}$ (n° 18). Au reste, pour vérifier, notamment, la première, il suffit d'y supposer que $i = -\psi$. On a alors $\frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{\rho_\varepsilon}$, ce qui entraîne $\frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_\varepsilon}$. Et comme, d'autre part, $\frac{di}{dS} = -\frac{d\psi}{dS}$, on en conclut, pour la première courbure géodésique $\frac{1}{\rho'}$ de (S), cette valeur connue :

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{1}{\tau_\varepsilon} + \frac{d\psi}{dS}.$$

Mais revenons à nos courbures obliques (1).

De même qu'entre $\frac{1}{\rho''}$ et $\frac{1}{\rho_0}$, nous avons, en son temps, trouvé (*voir* : Bulletin de la Société Mathématique de France, 1898, p. 116) la relation

$$(3)\quad \left(\frac{1}{\rho''^2} + \frac{1}{\rho_0^2}\right) + (q_1 - p'_1)\frac{1}{\rho''} - (p + q')\frac{1}{\rho_0} + (pq' - qp') = 0,$$

ainsi y a-t-il lieu de chercher celle qui, pour chaque valeur donnée à i, doit exister entre $\frac{1}{\rho_i}$ et $\frac{1}{\rho_j}$.

A cet effet, remarquons d'abord qu'au système (1), on peut substituer le suivant :

$$(1')\quad \begin{cases} p \sin\varphi' + p' \sin\varphi = \dfrac{\sin(\varphi' - i)}{\rho_j} + \dfrac{\cos(\varphi' - i)}{\rho_i}, \\ q \sin\varphi' + q' \sin\varphi = \dfrac{\sin(\varphi + i)}{\rho_j} - \dfrac{\cos(\varphi + i)}{\rho_i}. \end{cases}$$

Mais on a, d'autre part,

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\varphi \sin\Phi = \sin\varphi' + \sin\varphi \cos\Phi, \\ \cos\varphi' \sin\Phi = \sin\varphi + \sin\varphi' \cos\Phi. \end{cases}$$

Introduisant dans (1′) les valeurs de ces cosinus, on fera aisément prendre à ce système la forme homogène

$$(1'')\quad \begin{cases} A \sin\varphi' + B \sin\varphi = 0, \\ A' \sin\varphi' + B' \sin\varphi = 0; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$AB' - BA' = 0,$$

ou bien

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho_i^2} + \frac{1}{\rho_j^2}\right) - [(p + q') \sin i - (q_1 - p'_1) \cos i] \frac{1}{\rho_i} \\ &\qquad - [(p + q') \cos i + (q_1 - p'_1) \sin i] \frac{1}{\rho_j} + K'' = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est la relation demandée. A vrai dire, pour l'obtenir, il a fallu tenir compte, comme dans nos calculs antérieurs, des formules-types connues :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} p + q \cos \Phi = p_1 \sin \Phi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 - q_1 \cos \Phi = p \sin \Phi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(6) \qquad K'' = \frac{\mathrm{K}''}{\sin^2 \Phi} = p q' - q p' = p_1 q'_1 - q_1 p'_1.$$

Quoi qu'il en soit, si, dans la relation générale (5), nous faisons successivement $\frac{1}{\rho_i} = 0$, $\frac{1}{\rho_j} = 0$, il viendra

$$(8) \quad \frac{1}{\rho_j^2} - [(p + q') \cos i + (q_1 - p'_1) \sin i] \frac{1}{\rho_j} + K'' = 0,$$

$$(9) \quad \frac{1}{\rho_i^2} - [(p + q') \sin i - (q_1 - p'_1) \sin i] \frac{1}{\rho_i} + K'' = 0.$$

Nous retrouvons de la sorte la double série des *foyers dioptiques* déjà recontrés au n° 28, foyers ainsi dénommés, rappelons-le, parce qu'ils restent compris entre les foyers-limites *optique* ou *anoptiques*, correspondant à $i = 0$, à savoir :

$$(8') \qquad \frac{1}{\rho_0^2} - (p + q') \frac{1}{\rho_0} + K'' = 0,$$

$$(9') \qquad \frac{1}{\rho''^2} + (q_1 - p'_1) \frac{1}{\rho''} + K'' = 0.$$

II. Droites focales optiques. — C'est pour abréger que nous conviendrons d'appeler (sans crainte d'ambiguité) nos *directrices rectilignes* : *droites focales optiques* (n° 55). La même convention s'étendra du reste à la variété entière de directrices qui doit nous occuper.

Cela étant, puisque, d'après la formule (46^{IV}) du n° 26, les lignes

de courbure (S_1) de la pseudo-surface **F**, en contact en M avec le plan mobile des X Y, ont pour équation

$$(10)\qquad p_1\,ds^2 + (q_1 + p'_1)\,ds\,ds' + q'_1\,ds'^2 = 0,$$

les tangentes à ces lignes, en ce même point, sont représentées par celle-ci

$$(10')\qquad p_1\mathrm{X}^2 + (q_1 + p'_1)\mathrm{X}\mathrm{Y} + q'_1\mathrm{Y}^2 = 0,$$

avec cette particularité que ce sont là tout aussi bien, et les traces des *plans focaux optiques* ou de première espèce (π_1) et ces plans eux-mêmes (n° 60).

Ceci posé, écrivons l'équation (10′) comme il suit

$$(11)\qquad \frac{-q_1\mathrm{X} - q'_1\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = \frac{p_1\mathrm{X} + p'_1\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}} = \frac{1}{Z}.$$

On en tire

$$(11')\qquad \begin{cases} (q_1\mathrm{X} + q'_1\mathrm{Y})Z + \mathrm{X} = 0, \\ (p_1\mathrm{X} + p'_1\mathrm{Y})Z - \mathrm{Y} = 0. \end{cases}$$

Interprétées géométriquement, ces dernières représentent deux paraboloïdes hyperboliques, tangents, à l'origine, l'un, au plan des YZ, l'autre au plan des ZX, et admettant en commun, pour l'un de leurs plans directeurs, celui des XY. De là, deux génératrices horizontales communes, elles aussi, à ces surfaces et respectivement situées dans les plans parallèles

$$(12)\qquad (p_1q'_1 - q_1p'_1)Z^2 + (q_1 - p'_1)Z + 1 = 0.$$

En coupant ces mêmes plans par les plans focaux (10′), on obtient deux couples d'horizontales qui se projettent suivant les tangents (1′) aux lignes (S_1) et ne sont autre que les *droites focales optiques* annoncées. Ajoutons que chaque couple doit être évidemment formé par des horizontales appartenant à des plans différents, ce qui fournit deux combinaisons distinctes.

III. Droites focales anoptiques. — De ce que les lignes asymptotiques (S_2) de **F** ont pour équation générale (n° 24)

$$(13)\qquad q\,ds^2 - (p - q')\,ds\,ds' - p'\,ds'^2 = 0,$$

il suit que celle des *plans focaux anoptiques* ou de 2ème espèce (π_2) sont représentés, eux et leurs traces, par

$$(13')\qquad q\mathrm{X}^2 - (p - q')\mathrm{Y}\mathrm{X} - p'\mathrm{Y}^2 = 0.$$

Posant

$$\frac{pX + p'Y}{X} = \frac{qX + q'Y}{Y} = \frac{1}{Z},$$

il vient, par l'élimination de X et de Y,

$$(14)\qquad (pq' - qp')Z^2 - (p + q')Z + 1 = 0.$$

Coupés par les plans focaux (13'), ces nouveaux plans produiront deux nouveaux couples d'horizontales dites : *droites focales anoptiques*, parce qu'elles passent par les foyers de ce nom. En vertu de leur formation même, elles se projettent sur le plan des XY suivant les tangentes en M aux lignes (S_2) et donnent lieu à la même observation que les précédentes.

IV. La double série des droites focales dioptques, en projection horizontale. — Nous remarquons immédiatement que l'équation des lignes pseudo-conjuguées (S_i), d'obliquité i (n° 27), nous permet d'écrire à vue celle des *plans focaux dioptiques* (π_i) correspondants, savoir :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &(p_1 \sin i - q \cos i)X^2 \\ &\qquad + [(q_1 + p_1') \sin i + (p - q') \cos i]XY \\ &\qquad\qquad + (q_1' \sin i + p' \cos i)Y^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Comme, d'une part, cette même équation représente les traces de ces plans sur celui des XY et que, d'autre part, les *droites focales dioptiques* de l'espace se projettent horizontalement sur ces traces, ainsi que l'analogie le fait prévoir, il suffira de s'occuper de cette équation (15).

En la résolvant, elle donne

$$(16)\qquad \frac{Y}{X} = \frac{-[(q_1 + p_1')u + (p - q')] \pm \sqrt{Au^2 + 2Bu + C}}{2(q_1'u + p')},$$

à condition de faire, avec $u = \operatorname{tg} i$,

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= (q_1^2 + p_1'^2) - 4p_1q_1', \\ B &= (q_1 + p_1')(p - q') - 2(p'p_1 - qq_1'), \\ C &= (p - q')^2 + 4qp'. \end{aligned}\right.$$

Ces coefficients son très significatifs ; car, poser, par exemple, $A > 0$ ou $C > 0$, c'est poser la condition de réalité, ou des lignes de courbure (S_1) ou des lignes asymptotiques (S_2).

Cela étant, par des calculs convenablement conduits, on s'assurera

que les racines du trinôme sous radical peuvent être mises sous la forme

$$(18)\qquad A u = -B \pm \sqrt{K''[(p_1 - q'_1)^2 + (q + p')^2]}.$$

De là, pour les traces qui nous occupent, les cas particuliers remarquables suivants :

α. Lorsque

$$(19)\qquad K'' = p q' - q p' = p_1 q'_1 - q_1 p'_1 = 0,$$

c'est-à-dire lorsqu'on a

$$(19')\qquad \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{p + q\cos\Phi}{p' + q'\cos\Phi} = \frac{p_1}{p'_1} = \frac{q_1}{q'_1},$$

l'équation (15) se décompose rationnellement en deux autres qui sont (n° 27) :

$$(a)\qquad \begin{cases} (p'_1 \sin i - q' \cos i) X + (q'_1 \sin i + p' \cos i) Y = 0, \\ (q_1 \sin i + p \cos i) X + (q'_1 \sin i + p'_1 \cos i) Y = 0. \end{cases}$$

β. Quand les conditions dites *pseudo-superficielles maxima* *), savoir :

$$p_1 - q'_1 = 0, \qquad q + p' = 0,$$

se trouvent vérifiées, la même équation se décompose ainsi

$$(b)\qquad \begin{cases} (\cos\Phi + \sin\Phi\sqrt{-1}) X + Y = 0, \\ (\cos\Phi - \sin\Phi\sqrt{-1}) X + Y = 0, \end{cases}$$

ce qui revient à dire qu'elle même n'est autre alors que

$$X^2 + Y^2 + 2XY\cos\Phi = 0.$$

γ. Quand ce sont, au contraire, les conditions *superficielles minima* (ibidem)

$$p + q' = 0, \qquad q_1 - p'_1 = 0,$$

qui sont satisfaites, on obtient, par dédoublement, le système

$$(c)\qquad \begin{cases} (q_1 \sin i + p \cos i + \omega_Z) X + (q'_1 \sin i + p' \cos i) Y = 0, \\ (p_1 \sin i + p \cos i + \omega_Z) Y + (q'_1 \sin i + p' \cos i) Y = 0, \end{cases}$$

dans lequel on a fait, comme par le passé,

$$(20)\qquad \omega_Z = p^2 + q^2 + 2pq\cos\Phi = p_1^2 + q_1^2 - 2p_1 q_1 \cos\Phi.$$

On remarque en outre que, dans le cas actuel (aussi bien du reste que dans le précédent), ω_Z est égal à ω'_Z.

---

*) Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. I, 5ème série, p. 365.

V. La double série de droites focales dioptiques, dans l'espace. — Mettons l'équation des plans focaux (π_i) ou (15) sous la forme suivante :

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{X}[(pX + p'Y)\cos i + (q_1X + q'_1Y)\sin i] \\ &= \frac{1}{Y}[(qX + q'Y)\cos i - (p_1X + p'_1Y)\sin i] = \frac{1}{Z}. \end{aligned} \right.$$

On en déduit

$$(21')\quad \left\{ \begin{aligned} &[(pX + p'Y)\cos i + (q_1X + q'_1Y)\sin i]Z = 0, \\ &[(qX + q'Y)\cos i - (p_1X + p'_1Y)\sin i]Z = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont là deux nouveaux paraboloïdes hyperboliques, tangents en M aux plans coordonnés et qui admettent en outre, pour chaque valeur de i, deux couples de génératrices horizontales communes contenues dans les plans

$$(22)\quad K''Z^2 - [(p + q')\cos i + (q_1 - p'_1)\sin i]Z + 1 = 0.$$

En coupant ces plans par les plans focaux (15), on obtient la première série des *droites focales dioptiques* ou *moyennes* annoncées, droites qui passent par les foyers de même nom (n°. 28) et dont les projections horizontales ne sont autre que les tangentes, à l'origine, des lignes (S_i).

Pour obtenir la deuxième série, il suffit, on le sait, de remplacer dans tout ce que nous venons de dire, i par $i - \frac{\pi}{2}$. De là le nom de plans focaux dioptiques *complémentaires* (π_j) ; etc.

VI. Lieu général des droites focales. — Soit qu'on élimine i entre les équations (15) et (22) de la première série, ou entre leurs correspondantes dans la deuxième, on trouve pour toutes les droites focales dont l'équation résulte de cette élimination (leurs limites y comprises) un seul et même lieu, du *huitième ordre*, mais qui se décompose en deux autres du quatrième, représentant deux *conoïdes réciproques*, à savoir :

$$(23)\qquad S^2Z^2 - R^2 = 0,$$

$$(24)\qquad K''R^2Z^2 - S^2 = 0,$$

équations où, pour abréger, on a fait

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 + 2XY\cos\Phi, \\ S^2 &= (pX+p'Y)^2 + (qX+q'Y)^2 + 2(pX+p'Y)(qX+q'Y)\cos\Phi \\ &= \omega_Z^2X^2 + \omega'^2_ZY^2 + 2\omega_Z\omega'_Z\cos(\omega_Z, \omega'_Z)XY. \end{aligned} \right.$$

J'ai dit : conoïdes réciproques ; car, si, dans l'une ou l'autre, on remplace, pour un instant, Z par Z', on en déduira la relation caractéristique

$$ZZ' = \pm K''.$$

C'est évidemment à la *nappe* (23) que se rapportent tous nos calculs.

La deuxième nappe, on le prévoit, correspond au cas où, au lieu d'égaler à $\frac{1}{Z}$, les rapports tirés des traces horizontales des divers plans focaux, nous les aurions égalés à Z. Cela nous eut fourni toute une seconde catégorie de droites focales, réciproques des premières, passant par des foyers situés sur MZ et de même dénomination que les anciens, comme aussi se projetant suivant les tangentes, à l'origine, des lignes (S_i), (S_j) et de leurs limites (S_1), (S_2).

En vue d'abréger les calculs relatifs aux deux cas, il sera bon de faire observer, en terminant, que le polynôme S^2 admet encore cette troisième forme, souvent avantageuse :

$$(25') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{S^2}{\sin\Phi} &= (pp_1 + qq_1)X^2 \\ &+ (p'p'_1 + q'q'_1)Y^2 + (pp'_1 + p'p_1 + qq'_1 + q'q_1)XY. \end{aligned} \right.$$

Enfin le cosinus de l'angle (ω_Z, ω'_Z) qui figure dans (25) peut, de son côté, s'exprimer doublement ainsi

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_Z\omega'_Z \cos(\omega_Z, \omega'_Z) &= pp' + qq' + (pq' + qp')\cos\Phi \\ &= p_1p'_1 + q_1q'_1 - (p_1q'_1 + q_1p'_1)\cos\Phi. \end{aligned} \right.$$

Ces formes nous ont été, personnellement, fort utiles, dans nos recherches, soit d'Optique géométrique, soit de Cinématique ; mais nous ne saurions en dire davantage ici sur un tel sujet.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE I.

ÉTUDE DES DIVERSES LIGNES QU'ON PEUT TRACER SUR UNE PSEUDO-SURFACE.

CHAPITRE I.

RELATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE II.

COURBURES DE DIVERS ORDRES D'UNE LIGNE QUELCONQUE TRACÉE SUR UNE PSEUDO-SURFACE.

Chapitre III.

LIGNES REMARQUABLES DES PSEUDO-SURFACES ET DES SURFACES.

LIVRE II.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES PSEUDO-SURFACES.

Chapitre I.

PROPRIÉTÉS AUTOUR D'UN POINT.

Chapitre II.

PROPRIÉTÉS AUTOUR D'UN AXE.

NOTE COMPLÉMENTAIRE.

TIPOGRAFIA MATEMATICA DI PALERMO, via Villareale, 11.
(262.1500.14 1/2) 8-4-1902.

TIPOGRAFIA MATEMATICA DI PALERMO, via Villareale, 11.
(262.1500.14 1/2) 8-4-1902.